RAÍCES HISTÓRICAS Y TRASCENDENCIA DE LA GEOMETRÍA ANALÍTICA

Pedro Miguel González Urbaneja (*)

"Los que buscan el camino recto de la verdad no deben ocuparse de ningún objeto sobre el que no puedan tener una certidumbre semejante a las demostraciones de la Aritmética y de la Geometría".

Descartes. *Reglas para la dirección del espíritu* [R.AT.X.366].

"Todos los problemas de Geometría pueden reducirse fácilmente a términos tales, que no es necesario conocer de antemano más que la longitud de algunas líneas rectas para construirlos".

Descartes. *La Geometría* [G.AT.VI. 369].

"Siempre que en una ecuación final se encuentran dos cantidades incógnitas, se tiene un lugar geométrico, describiendo el extremo de una de ellas una línea recta o curva".

Fermat. *Ad Locos Planos et Solidos Isagoge* [TH.OF.III.85].

"Descartes mediante un nuevo método hizo pasar de las tinieblas a la luz cuanto en las Matemáticas había permanecido inaccesible a los antiguos y todo cuanto los contemporáneos habían sido incapaces de descubrir".

Spinoza. *Los Principios de la Filosofía cartesiana*.

"La Geometría analítica, mucho más que cualquiera de sus especulaciones metafísicas, inmortaliza el nombre de Descartes y constituye el máximo paso hecho en el progreso de las ciencias exactas".

J. Stuart Mill (citado por E.Bell en *Les grands mathématiciens*).

La *Geometría Analítica* es un poderoso instrumento de ataque de los problemas geométricos que utiliza como herramienta básica el Álgebra. La esencia de su aplicación en el plano es el establecimiento de una correspondencia entre los puntos del plano y pares ordenados de números reales, es decir, un sistema de coordenadas, lo que posibilita una asociación entre curvas del plano y ecuaciones en dos variables, de modo que cada curva del plano tiene asociada una ecuación $f(x,y) = 0$ y, recíprocamente, para cada ecuación en dos variables está definida una curva que determina un conjunto de puntos en el plano, siempre respecto de un sistema de coordenadas. La *Geometría Analítica* es, pues, una especie de diccionario entre el Álgebra y la Geometría que asocia pares de números a puntos y ecuaciones a curvas. Pero esta asociación va mucho más allá de lo gramatical ya que vincula también las sintaxis del Álgebra y la Geometría, es decir, las relaciones, vínculos y operaciones entre los elementos de ambas. Así para hallar geométricamente la intersección de dos curvas $f(x,y) = 0$, $g(x,y) = 0$ (problema geométrico) habría que resolver de forma algebraica el sistema de ecuaciones formado por ambas (problema algebraico). Además, para cada curva $f(x,y) = 0$, la *Geometría Analítica* establece también una correspondencia entre las propiedades algebraicas y analíticas de la ecuación $f(x,y) = 0$ y las propiedades geométricas de la curva asociada. De hecho, estas propiedades geométricas son el trasunto geométrico de la estructura algebraica de la expresión $f(x,y) = 0$ y se establecen mediante el cálculo literal que permite el Álgebra. En particular la tarea de probar un teorema o resolver un problema en Geometría se traslada de forma muy eficiente a probarlo o resolverlo en Álgebra utilizando el cálculo analítico.

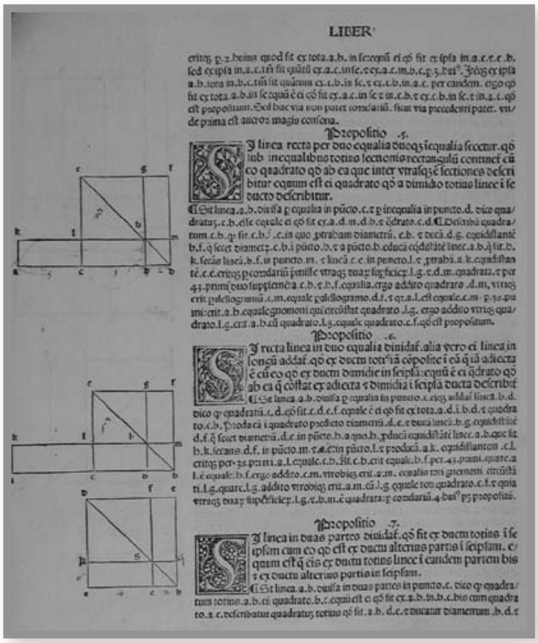
(*) Catedrático de Matemáticas del IES Sant Josep de Calassanç. Barcelona.

Es indiscutible que Fermat y Descartes son los verdaderos artífices de la *Geometría Analítica*. Descartes publica en 1637 *La Geometría* [G.AT,VI,367-485][(1)] junto con *La Dióptrica y Los Meteoros* como apéndices de su *Discurso del Método* [DM.AT,VI,1-78] o éste como prólogo de aquellos opúsculos. El mismo año, Fermat envía al Padre Mersenne sus investigaciones de alrededor de 1629 contenidas en la memoria [TH.OF.III.85-101] *Introducción a los Lugares Planos y Sólidos* (*Ad Locos Planos et Solidos Isagoge*). Las obras citadas de Descartes y Fermat contienen los fundamentos de la llamada más tarde *Geometría Analítica*. Estos matemáticos encontraron un terreno muy abonado por el Análisis Algebraico en el que Vieta había transformado el *Análisis Geométrico* de los griegos con la intervención de su incipiente *Álgebra simbólica*. Así pues, a pesar de la gran aportación de Fermat y Descartes a la *Geometría Analítica*, con gran reconocimiento por parte del primero y algo menos en el caso del segundo, su pensamiento geométrico es tributario de casi todo el desarrollo matemático anterior, en especial de la Geometría griega (y en particular de Apolonio y Pappus), y del llamado *Arte Analítica* de Vieta. Además hay dos eslabones intermedios importantes: el Álgebra de Diofanto y la *Latitud de las formas* de Oresme.

LAS CÓNICAS DE APOLONIO, *LOS PORISMAS* DE EUCLIDES, *LA ARITMÉTICA* DE DIOFANTO Y *LA COLECCIÓN MATEMÁTICA* DE PAPPUS

Las *Geometría Analíticas* de Fermat y Descartes constituyen un salto revolucionario sin precedentes en la Historia de la Matemática. Para ponderar en su justo valor el nuevo instrumento científico y comprender cómo tuvo lugar su gestación es imprescindible conocer la naturaleza que adoptó la Geometría griega ante la solución que le dio Eudoxo (408-355 a.C.), mediante la *Teoría de la Proporción*, a la tremenda crisis de fundamentos provocada por la aparición de los inconmensurables, con la consiguiente estructuración rígida de la Matemática griega elemental en la enciclopédica obra de *Los Elementos* de Euclides, que establece como paradigma un estilo

Tras la aparición de los inconmensurables los griegos no pueden manejar numéricamente longitudes y áreas de modo que operan directamente con las figuras que se tratan como magnitudes. Así aparece el *Álgebra Geométrica* del Libro II de *Los Elementos* de Euclides como un algoritmo geométrico para resolver los problemas sin cálculo literal. Los números son segmentos de recta y las operaciones se realizan mediante construcciones geométricas –la suma de dos números se realiza yuxtaponiendo segmentos, el producto es el área del rectángulo de lados las longitudes de esos números y una raíz cuadrada es equivalente a la construcción de un cuadrado de área igual a la de un rectángulo dado–. En las primeras diez proposiciones del Libro II Euclides establece la equivalencia geométrica de las principales identidades algebraicas muy habituales en la práctica escolar. Las figuras geométricas que utiliza Euclides permiten utilizar el *Álgebra Geométrica* como un eficaz instrumento para la resolución de ecuaciones cuadráticas, mediante el método de la *Aplicación de las áreas*, lo que supone que el Libro II juegue un papel fundamental en la Geometría griega.


LIBER

Propositio .5.

Propositio .6.

Propositio .7.

Proposiciones II.5, II.6 y II.7 del *Álgebra Geométrica* del Libro II de *Los Elementos* de Euclides (primera impresión, E.Ratdolt, Venecia, 1482) sintético de exposición que oculta la vía heurística del descubrimiento, impulsa la Geometría al margen de la Aritmética, impide el desarrollo de un Álgebra en sentido algorítmico y simbólico y limita la introducción de nuevas curvas a su construcción mediante intersección de superficies o lugares geométricos definidos a través de relaciones de áreas o longitudes, en forma de proporción, y no por medio de ecuaciones. La estructura que adopta esta Matemática se llama el *Álgebra Geométrica* de los griegos. Se trata de una especie de Geometría Algebraica, resultado de la geometrización de los métodos algebraicos de los babilónicos, en la que los números son sustituidos por segmentos de recta y las operaciones entre ellos se llevan a cabo, mediante construcciones geométricas, que obligan a mantener escrupulosamente la homogeneidad de los términos. Esta teoría desarrolla una potente técnica de resolución de ecuaciones, muy rigurosa, aunque bastante compleja, que se llama el método de *Aplicación de las Áreas*.

Una cuestión histórica muy debatida es la siguiente: ¿en qué medida se encuentran aspectos de la llamada *Geometría Analítica* en los grandes matemáticos griegos y en particular en *Las Cónicas* de Apolonio? A fin de no caer en anacronismos inadmisibles, para encontrar vestigios históricos de *Geometría Analítica* debemos definir y tener claro los problemas que resuelve esta parte de la Matemática, así como los instrumentos que utiliza, a fin de remontarse a los orígenes y rastrear en la Historia primigenia de la Geometría todos estos elementos. Bajo este principio analizaremos en qué dimensión, Menecmo, Euclides, Apolonio, Pappus, Oresme, Vieta e incluso Fermat y Descartes, desarrollaron aspectos parciales de *Geometría Analítica*, entendiendo por ésta lo que hemos descrito más arriba y que ahora sintetizamos: "la aplicación del Álgebra simbólica al estudio de problemas geométricos mediante la asociación de curvas y ecuaciones indeterminadas en un sistema de coordenadas".

Se atribuye al más famoso de los discípulos de Eudoxo, Menecmo (hacia 350 a.C.) de la *Academia* platónica, maestro de Aristóteles y Alejandro Magno, la introducción de las secciones cónicas, es decir, el descubrimiento de las curvas que después recibieron el nombre de elipse, parábola e hipérbola (la llamada *Triada de Menecmo*), obtenidas como sección por un plano perpendicular a una generatriz de conos rectos de tres tipos, según que el ángulo en el vértice sea agudo, recto u obtuso. Realmente hay una gran similitud entre los desarrollos de Menecmo en relación a expresiones equivalentes a ecuaciones y la utilización de coordenadas, lo que ha inducido a algunos historiadores a afirmar que este geómetra ya conocía ciertos aspectos de la *Geometría Analítica*. De hecho ignorando el lenguaje de ésta se hace difícil interpretar el hallazgo de Menecmo.

Las cónicas se definen ahora como lugares de puntos en el plano para los que las distancias a una recta (directriz) y a un punto (foco) están en una determinada razón (excentricidad). Esta definición se traslada de forma muy simple al lenguaje algebraico de ecuaciones de nuestra *Geometría Analítica*. Realmente impresiona la sagacidad de Menecmo al descubrir la familia más útil de curvas de todas las ciencias y en ausencia del simbolismo algebraico. Pero no sólo esto, sino que, independiente de su origen plano o estereométrico, Menecmo fue capaz de vincular ambos aspectos de las cónicas, mostrando que las secciones de los conos tenían importantes propiedades como lugares planos, traducibles en básicas expresiones geométricas –equivalentes a nuestras *ecuaciones*–, que permitían deducir, a su vez, otras innumerables propiedades de las cónicas, que serían plasmadas por Apolonio (hacia 200 a.C.) en los primeros libros de *Las Cónicas*. Es bajo esta visión sobre el trabajo de Menecmo que algunos historiadores modernos (Zeuthen, Coolidge, Loria y Heath) reclaman para los griegos –empezando por Menecmo– la paternidad de la *Geometría Analítica*, al establecer como la esencia de esta rama de la Matemática el estudio de los lugares por medio de *ecuaciones*. Se deben aquilatar, no obstante, ciertas afirmaciones en torno a presuntos precursores de la *Geometría Analítica*, porque tales atribuciones, más o menos fundadas, pueden chocar con las serias limitaciones impuestas por el carácter geométrico-sintético de la Geometría griega y por la ausencia de un Álgebra simbólica en sentido algorítmico, que es un componente ineludible de una verdadera *Geometría Analítica* general, y que a fin de cuentas es lo que permite la real y mutua correspondencia entre curvas y ecuaciones. Esto fue realmente lo que se plantearon y resolvieron Fermat y Descartes con el concurso del *Arte Analítica* de Vieta, al establecer que una ecuación arbitraria en dos cantidades indeterminadas, proporciona, con respecto a un sistema dado de coordenadas, una curva en este plano, cuestión de capital importancia al ser una de las vertientes del *Principio fundamental de la Geometría Analítica*. La vertiente opuesta establece que una curva plana tiene asociada, con respecto a un sistema dado de coordenadas, una ecuación en dos cantidades indeterminadas. Con las reservas apuntadas –lenguaje retórico y sintético, ausencia del algoritmo algebraico, ...–, es indudable que esta segunda cara del *Principio fundamental de la Geometría Analítica* era muy familiar a los griegos, a partir de Menecmo y sobre todo de Apolonio, al menos para las cónicas.

Euclides (hacia 300 a.C.) escribió, además de *Los Elementos*, otras obras de las que tenemos constancia e incluso fragmentos a través de *El Tesoro del Análisis* de Pappus. Una de ellas fue un trabajo sobre secciones cónicas, incorporado más tarde a *Las Cónicas* de Apolonio. Asimismo y por desgracia, por haberse perdido, no tenemos más que ligeras referencias de *Los Porismas*. Según Pappus (hacia 300 d.C.) un *porisma* es un elemento matemático intermedio entre un teorema –donde se propone algo para ser demostrado– y un problema –donde se propone algo para ser construido–. Los griegos dividían las proposiciones geométricas en tres tipos: teoremas, problemas y porismas, según que hubiera que demostrar, construir o encontrar algo. Para otros autores, como Chasles (1793-1880), un porisma era una proposición en la que se anuncia la posibilidad de determinar ciertas cosas –y se hallan efectivamente– que tienen cierta relación con otras fijas y conocidas y con otras variables indeterminadas, estableciéndose una ley de variación, quizá una ligera aproximación al concepto de función en Grecia. Todavía para otros estudiosos un porisma sería algo parecido a la expresión retórica de la ecuación verbal de una curva. Según parece, la doctrina de los porismas de Euclides sería una aproximación helénica a un cierto tipo de incipiente *Geometría Analítica* donde el discurso retórico equivaldría al simbolismo y la construcción geométrica a las técnicas algebraicas.

El Tesoro del Análisis del Libro VII de *La Colección Matemática* de Pappus estaba constituido en gran parte por obras de Apolonio (*Los Lugares Planos*, *Secciones en una razón dada*, *Secciones determinadas*), perdidas o conservadas entonces de forma fragmentaria, que debían de incluir bastante material geométrico (en particular problemas de lugares geométricos equivalentes a la resolución de ecuaciones cuadráticas), cuyo estudio forma parte hoy de la *Geometría Analítica*. Durante el siglo XVII hubo una auténtica obsesión, sobre todo en Fermat, por la reconstrucción de muchas de las obras perdidas de Apolonio y precisamente en esta labor estuvo el origen de su *Geometría Analítica*.

Pero sin duda la obra más importante de Apolonio es *Las Cónicas* que supera con creces y oscurece lo que con anterioridad habían escrito sobre el tema Menecmo, Aristeo y Euclides. Apolonio demuestra en *Las Cónicas* que de un cono único pueden obtenerse los tres tipos de secciones, variando la inclinación del plano que corta al cono, lo cual era un paso importante en el proceso de unificar el estudio de los tres tipos de curvas. Además, acuñó, con significado, para la posteridad, los nombres de *elipse*, *parábola e hipérbola*, términos que procedían del lenguaje pitagórico de la solución de ecuaciones cuadráticas del método de *Aplicación de las Áreas*. El cambio de nomenclatura envolvía un cambio conceptual, toda vez que las cónicas ya no serían descritas constructivamente, sino a través de relaciones de áreas y longitudes, que daban en cada caso la propiedad característica de definición de la curva y expresaban sus propiedades intrínsecas.

Señalemos, en especial, que en el estudio de las cónicas, Apolonio considera ciertas *líneas de referencia* –diámetros conjugados o diámetro-tangente–, que juegan un papel de *coordenadas*. En el segundo caso al tomar un diámetro y una tangente en uno de sus extremos como rectas de referencia, las distancias medidas a lo largo del diámetro a partir del punto de tangencia son las *abscisas* y los segmentos paralelos a la tangente, interceptada por el diámetro y la curva, son las *ordenadas*. Para cada cónica, la conocida relación de áreas y longitudes en forma de proporción –propiedad geométrica de la curva equivalente a su definición como lugar geométrico– se traduce en una relación entre las *abscisas* y las correspondientes *ordenadas*, que Apolonio llamaba el *symptoma* de la curva y que no es sino la expresión retórica de la ecuación analítica de la curva, que en su evolución histórica daría lugar a la llamada por Fermat en la *Isagoge* la *ecuación característica*. El lenguaje de Apolonio es sintético, utilizando con una pericia increíble la técnica pitagórica de la *Aplicación de las Áreas*, pero sus "métodos de coordenadas" guardan una gran similitud con los de la *Geometría Analítica*.

Al analizar el rumbo histórico de Apolonio hacia la *Geometría Analítica* digamos que, a pesar de los conceptos y elementos geométricos introducidos, que parecen emular la presencia de *sistemas de referencia con coordenadas –abscisas y ordenadas–* que permiten expresar las *ecuaciones* de las cónicas, estos *sistemas de coordenadas* aparecían siempre superpuestos *a posteriori* a las curvas para estudiar sus propiedades. Las *coordenadas, variables y ecuaciones* no son elementos de partida, sino conceptos subsidiarios derivados de situaciones geométricas concretas de curvas que determinan las *ecuaciones* sin que se dé la situación inversa, es decir, que las ecuaciones determinen las curvas, ya que éstas siempre se producían mediante una construcción estereométrica como secciones de un sólido (tal es el caso de las propias cónicas de Menecmo y Apolonio) o de forma cinemática como composición de movimientos (tal es el caso de la *espiral de Arquímedes* o la *cuadratriz de Dinostrato*), de forma que el conjunto de curvas manejadas por los griegos fue necesariamente muy limitado. Como manifiesta Boyer (1986, p.208):

> "El hecho de que Apolonio, uno de los más grandes geómetras de la antigüedad, no consiguiese desarrollar de una manera efectiva la Geometría Analítica, se debe probablemente más a una pobreza en el número de curvas que de pensamiento; los métodos generales no son ni muy necesarios ni muy útiles cuando los problemas se refieren siempre a un número limitado de casos particulares. Por otra parte, es bien cierto que los primeros inventores de la Geometría Analítica tenían a su disposición todo el álgebra renacentista [el Álgebra de los cosistas italianos y el Álgebra simbólica de Vieta], mientras que Apolonio tuvo que trabajar con las herramientas del Álgebra Geométrica, mucho más rigurosa pero a la vez mucho más incómoda de manejar".

Efectivamente, el tratamiento sintético de los problemas esclaviza a depender de la estructura geométrica intrínseca de las figuras atomizando la casuística de los casos específicos, mientras que el enfoque analítico, siempre con el recurso algorítmico del Álgebra simbólica, permite, como veremos, la generalización de los métodos y la aplicación de las mismas técnicas a situaciones análogas.

No obstante lo dicho y con las limitaciones apuntadas, debemos ponderar la magnífica obra de Apolonio como el primer hito en la Historia de la Matemática sobre la aplicación de coordenadas al estudio de las propiedades de las curvas; y aunque el discurso retórico sustituye al simbolismo y la construcción geométrica a las técnicas algebraicas, las relaciones de área y longitud mediante las que Apolonio expresa las propiedades intrínsecas de la curva se traducen con gran facilidad –y así lo hará Fermat– al ulterior lenguaje del Álgebra simbólica de ecuaciones que permitirá la asociación de curvas y ecuaciones, esencia de la *Geometría Analítica*. El trabajo de Apolonio –y antes el de Menecmo– inicia, pues, la singladura histórica hacia las Geometrías Analíticas de Fermat y Descartes.

Además, dos problemas históricos importantes de gran incidencia sobre la *Geometría Analítica* de Descartes tienen su origen la obra de Apolonio: *el Problema de Apolonio*:

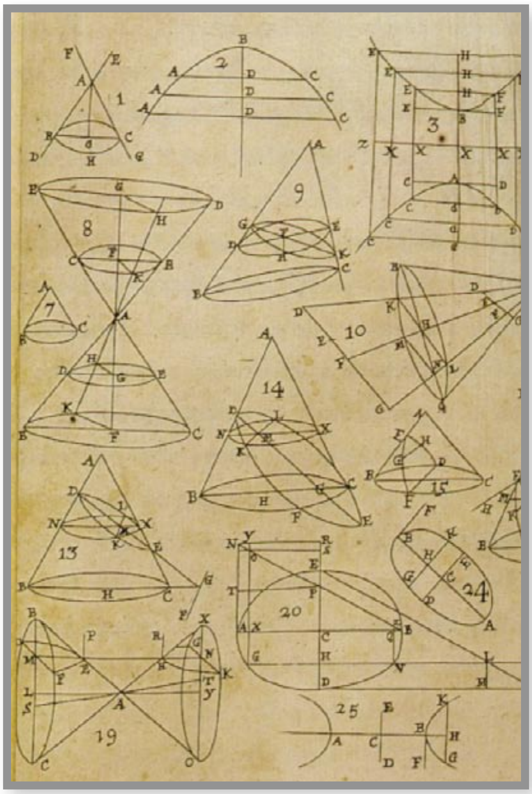
"Dados tres elementos, punto, recta o circunferencia, trácese una circunferencia que sea tangente a cada uno de los tres",

y el Problema de Pappus o "lugar geométrico determinado por tres o cuatro rectas":

"Dadas tres (resp. cuatro) rectas en un plano, encuéntrese el lugar geométrico de un punto que se mueve de forma que el cuadrado de la distancia a una de las tres rectas es proporcional al producto de las distancias a las otras dos (resp. el producto de las distancias a dos de ellas es proporcional al producto de las distancias a las otras dos), si las distancias se miden en direcciones tales que formen ángulos dados con las líneas correspondientes".

Las Cónicas de Apolonio desarrollan muchos aspectos que anticipan elementos de las Geometrías Analíticas de Fermat y Descartes. Empezando con su construcción a través de un único cono, Apolonio acuña con significado los nombres de Elipse, Parábola e Hipérbola –procedentes del lenguaje pitagórico de la *Aplicación de las Áreas*– como definición de las cónicas mediante relaciones de áreas y longitudes expresadas en forma de proporción que daban retóricamente la propiedad característica de la curva –el *symptoma* de la curva–que en el devenir histórico se convertiría –para Fermat– en la *propiedad específica* de la curva.

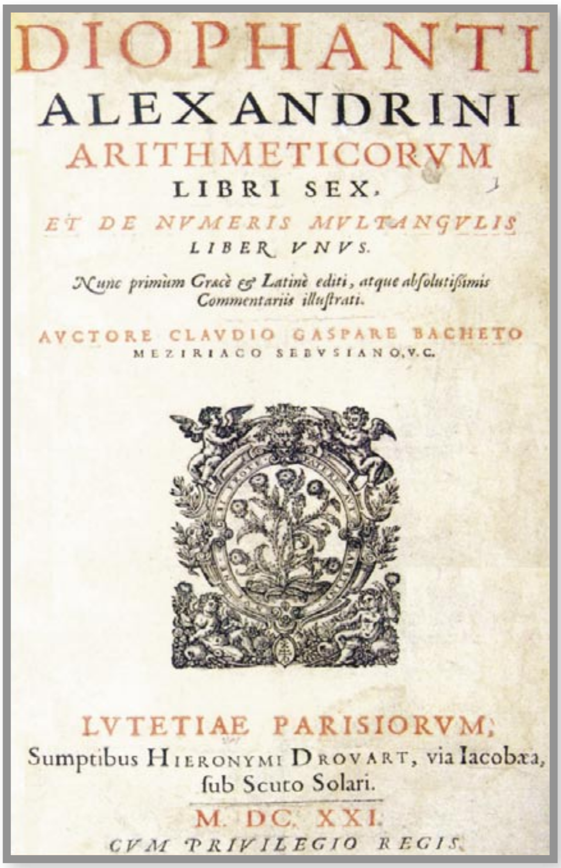
Como harán Descartes y Fermat, Apolonio considera ciertas *líneas de referencia* –diámetros conjugados o diámetro-tangente–, que jugando un papel de *coordenadas*, asocia a la curva dada, de modo que mediante Álgebra retórica son expresadas en función de esas líneas las propiedades geométricas de la curva equivalentes a su definición como lugares geométricos.



Figuras de *Apollonii Pergaei Conicorum libri* IV. Edición de I.Barrow de *Las Cónicas* de Apolonio (Londres, 1675)

Al ser el Álgebra simbólica el instrumento algorítmico básico de la *Geometría Analítica*, en el rastreo de los orígenes de ésta debemos encontrar las raíces primigenias de aquélla, de ahí la necesidad de mencionar a Diofanto de Alejandría (hacia 250 d.C.) que con su obra *La Aritmética* inaugura lo que Nesselman llamó en 1842 el Álgebra sincopada. A base de adoptar ciertas letras o expresiones como abreviaturas para las cantidades indeterminadas y sus potencias y para las operaciones más habituales, fragua un incipiente simbolismo antecedente de la notación algebraica, que inicia la construcción de una máquina mental de asombrosa precisión y eficacia, que constituye la matriz del Álgebra. Por ello a Diofanto se le reconoce, a veces, como el *padre del Álgebra*, ya que su trabajo representa un avance considerable con respecto al farragoso lenguaje del *Álgebra Geométrica* de Euclides. Diofanto es un pionero en el proceso que sembrado durante 1.300 años por los árabes y por los matemáticos renacentistas italianos, transforma la *logística numerosa* –que opera con números– en otra que opera con todo tipo de especies, la *logistica speciosa* de Vieta, que generalizará los métodos mediante el cálculo literal hacia la doctrina algebraica como uno de los cimientos de la Matemática al convertirse en su propio lenguaje. Así se lo reconocerá Descartes en la Regla IV de sus *Reglas para la dirección del espíritu* de 1628 (*Regulae ad directionem ingenii* [R.AT.X.376]).

El último de los grandes geómetras griegos es Pappus que escribió *La Colección Matemática*, una obra muy heterogénea, de un valor científico, histórico y metodológico inconmensurable. Encontramos en la obra de Pappus, además de infinidad de teoremas y problemas sobre Geometría superior (no incluida en *Los Elementos* de Euclides), un gran número de cuestiones que debemos situar en las raíces históricas de la *Geometría Analítica* como son la más elaborada exposición sobre los métodos de *Análisis y Síntesis*, numerosas soluciones a los problemas clásicos de la *duplicación del cubo* y la *trisección del ángulo*, nuevos estudios y extensiones de propiedades de las secciones cónicas como lugares geométricos (sobre todo el Teorema VII.238 que permite unificar en la Geometría escolar la definición de las tres cónicas como lugares geométricos en relación con distancias a un punto, el foco y a una recta, la directriz) y la clasificación definitiva de los problemas geométricos en *planos, sólidos y lineales*, según que sean resolubles, respectivamente, con rectas y circunferencias, cónicas u otras curvas superiores, que perseguía la idea de ajustar la envergadura de los instrumentos geométricos a utilizar a la enjundia de los problemas geométricos a resolver, en la línea de aplicar siempre los medios más simples posibles, lo que será no sólo un rasgo distintivo de las Geometrías Analíticas de Fermat y Descartes, sino un componente general de la mejor Matemática, que siempre exige elegancia y economía en el razonamiento.



Libro I de *La Aritmética* de Diofanto. Edición de G. Bachet de Meziriac, publicada en París en 1621. Sobre un ejemplar de esta edición hizo Fermat sus famosas anotaciones sobre lo que después se ha llamado *Teoría de Números*

Pero quizá el asunto más importante sea el tratamiento general del llamado *Problema de Pappus o lugar geométrico de n rectas*, que en su formulación más sencilla, para tres o cuatro rectas ya era conocido por Apolonio, siendo la solución una cónica, y que ha tenido un valor emblemático para la Historia de la *Geometría Analítica*. Pappus realiza un estudio exhaustivo del problema, propone la generalización a más de cuatro rectas y reconoce que independientemente del número de rectas involucradas en el problema, queda determinada una curva concreta. He aquí la observación más general sobre lugares geométricos de toda la Geometría griega, lo que implica, además, la consideración de infinitos tipos nuevos de curvas planas, algo esencial en un mundo geométrico tan limitado en cuanto a curvas planas. Pappus vacila a la hora de considerar el problema para más de seis líneas porque: "no hay nada contenido en más de tres dimensiones". De haber seguido en esa dirección, se habría dado un paso muy importante de anticipación de la *Geometría Analítica*, toda vez que ello hubiera propiciado un necesario tratamiento algebraico y no geométrico de los productos de líneas involucradas en el problema. Esto fue precisamente uno de los grandes logros de Descartes, la reforma de la notación, hacia la invención de la *Geometría Analítica*, al escribir [G.AT,VI, 371]:

> "Es de señalar que para a^2 o b^3 u otras expresiones semejantes, yo no concibo ordinariamente mas que líneas simples, aunque para servirme de los nombres usados en álgebra, los designe por cuadrados, cubos, etc.".

Con anterioridad a Descartes, geométricamente sólo tenían sentido las potencias cuadrática a^2 y cúbica a^3, que representaban respectivamente un cuadrado de lado a y un cubo de arista a. Diofanto sí había considerado potencias superiores a la tercera, pero en un ámbito estrictamente aritmético. En la notación cartesiana hay una clave geométrica que estriba en que un segmento de recta es considerado tanto magnitud geométrica continua como una medida numérica, pero la potencia de una línea recta sigue siendo una línea recta, así que cuadrado y cubo no indicarán magnitudes planas o espaciales, sino la segunda o tercera potencia de un número, de modo que las operaciones aritméticas quedan incluidas en un terreno estrictamente algebraico. De esta forma Descartes rompe con la tradición griega al abandonar el *principio de homogeneidad*, que había sido una de las grandes limitaciones del *Álgebra Geométrica* de los griegos. Pues bien, en ello jugó un papel esencial el trato que dio al *problema de Pappus*, donde además Descartes desarrolla un completo estudio de curvas planas superiores determinadas como lugares para el caso de más de cuatro líneas.

Página de *La Colección Matemática* de Pappus en un manuscrito del siglo X de la colección vaticana

En esta monumental obra Pappus realiza una encomiable labor de compilación, comentario, restauración, clasificación y generalización del conocimiento matemático griego considerado como superior, es decir, no incluido en *Los Elementos* de Euclides. Esta obra es, además, un gigantesco manantial bibliográfico esencial para el estudio de la Geometría griega porque describe una multitud de trabajos matemáticos perdidos de Euclides, Arquímedes, Apolonio, Aristeo y Eratóstenes que constituyen lo que se llama *Tesoro del Análisis*, donde Pappus relata las vías que seguía la investigación geométrica, oculta en los grandes tratados clásicos debido a su estilo sintético, es decir, lo que los antiguos geómetras entendían por *Análisis y Síntesis*. Por todo ello *La Colección Matemática* de Pappus –con soluciones nuevas a numerosos problemas clásicos y estudios definitivos de las cónicas como lugares geométricos– es una de las principales fuentes de inspiración matemática a partir del Renacimiento que tuvo una incidencia decisiva en la evolución del *Álgebra Geométrica* griega hacia las Geometrías Analíticas de Fermat y Descartes.

Naturalmente los métodos sintéticos le desbordan a Pappus en el abordaje del problema. El Álgebra sincopada de Diofanto no es aún un Análisis Algebraico. Cuando lo sea, tras la actuación de Vieta, el nuevo Álgebra actuará sobre el Análisis Geométrico de los griegos para dar a luz las Geometrías Analíticas de Fermat y Descartes como poderosos instrumentos algorítmicos de ataque de los problemas geométricos difíciles como el propio *Problema de Pappus*. Aun así, la posición de Pappus en la línea histórica de la *Geometría Analítica* es muy honorable como señala el propio Descartes en la regla IV de las Regulae [R.AT.X.376]. De hecho, fue la generalización del *Problema de Pappus* –como bautismo de fuego que tuvo que pasar *La Geometría* de Descartes– quien "puso a prueba la superioridad de los métodos analíticos cartesianos". Por eso es tan importante conocer la obra de Pappus, sin la cual es difícil entender la impresionante eclosión del desarrollo matemático en los siglos XVI y XVII.

EL ANÁLISIS GEOMÉTRICO GRIEGO Y LA GEOMETRÍA ANALÍTICA

Veamos ahora una cuestión metodológica que nos permita comprender mejor la evolución del *Álgebra Geométrica* de los griegos hacia la *Geometría Analítica* de Fermat y Descartes. *Los Elementos* de Euclides establecieron un severo modelo de exposición y demostración que oculta el camino de la investigación hacia el descubrimiento. Surge de forma natural la pregunta acerca de cómo los geómetras griegos encontraban sus impresionantes resultados que después plasmaban en sus obras con un rigor impecable e implacable. Pues bien, es aquí donde interviene el *Análisis* como un procedimiento metodológico capital para el progreso de la Matemática, del que la *Geometría Analítica* heredará no sólo su nombre sino sobre todo sus procedimientos.

Proclo (411–485 d.C.) en sus *Comentarios al Libro I de los Elementos de Euclides* atribuye a Hipócrates de Quíos (hacia 450 a.C.) la invención del *Método Analítico* cuando lo define ("la apagogé es una reducción de un problema o de un teorema a otro, que si es conocido o determinado, conduce a la solución de la cuestión propuesta". Pero siempre se le ha atribuido a Platón (427-347 a.C.), que lo describe al final del Libro VI de *La República*(2) y lo formula como un método pedagógicamente conveniente, viniendo a decir que cuando una cadena de razonamientos desde unas premisas a una conclusión no es obvia, se puede invertir el proceso; uno puede empezar por la proposición que ha de probarse y deducir de ella una conclusión que es conocida. Si entonces podemos invertir los pasos en esta cadena de razonamientos, el resultado (*Síntesis*) es una prueba legítima de la proposición. Es decir, mediante el *Análisis* se asume como cierto aquello que hay que probar y se razona con base en esta asunción hasta llegar a algo que forma parte de los principios o alcanzar un resultado cierto por haber sido previamente establecido. Si entonces podemos invertir la secuencia de los pasos anteriores se obtiene una demostración del teorema que había que probar. Así pues, el *Análisis* viene a ser un procedimiento sistemático de descubrir "condiciones necesarias" para que un teorema sea cierto, de modo que si por medio de la *Síntesis* se muestra que estas condiciones son también "suficientes", se obtiene una demostración correcta de la proposición.

Conviene explicar un poco en qué medida la *Geometría Analítica* recibe su nombre precisamente del método de *Análisis* de los griegos. Como se ha dicho, el *Análisis* empieza "asumiendo como cierto aquello que hay que probar". Esto es precisamente un principio que aplica Descartes desde el comienzo de *La Geometría*. Por ejemplo en el segundo epígrafe del Libro I, titulado: Cómo se llega a las ecuaciones que sirven para resolver los problemas, Descartes escribe: "Así, si se quiere resolver algún problema, debe de antemano considerarse como ya resuelto,..." [G.AT,VI,372]. Descartes no sólo realizará una aplicación directa de los procedimientos del *Análisis y la Síntesis* de los griegos sino que reformulados serán las dos reglas intermedias de las cuatro reglas del *El Discurso del Método* [DM.AT,VI,17-18]. Una y otra vez en la multiplicidad de problemas que resuelve en *La Geometría*, Descartes empezará por suponer el problema resuelto. En concreto en dos de los problemas más importantes que trata, Descartes escribe literalmente:

"Primeramente yo supongo la cosa como ya hecha, ..." (Problema de Pappus [G.AT,VI, 382]).

"Supongamos que la cosa está hecha, ..." (rectas normales a una curva [G.AT,VI, 413]).

Naturalmente hay una diferencia notable entre la aplicación que del método de *Análisis y Síntesis* hacen los griegos y lo que realizan Descartes y Fermat en lo que se ha llamado sus *Geometría Analíticas*. Éste es el asunto que queremos estudiar: a partir de algunos de los principios metodológicos de la Geometría griega tiene lugar el nacimiento de algo completamente nuevo y revolucionario (*La Geometría* de Descartes y la *Isagoge* de Fermat), algo que consigue clausurar, en gran parte, el punto de partida: la propia Geometría griega. ¿Qué poderoso instrumento utilizarán Fermat y Descartes para alcanzar tal hazaña matemática? El Álgebra, una herramienta que no pudo disfrutar la Geometría griega porque la aparición súbita de los inconmensurables desvió la influencia de la Matemática babilónica, bien versada en Aritmética y en incipientes técnicas algebraicas, hacia la *Geometría Sintética* y el *Álgebra Geométrica*. Cuando Fermat y Descartes, bajo la inspiración de Vieta, apliquen todo el potencial algorítmico del Álgebra árabe, renacentista y del propio Vieta, el *Análisis* alcanzará su máximo poder heurístico para la resolución de los problemas geométricos (incluso los que se habían resistido de forma reiterada a los métodos clásicos), a base de complementar el estudio analítico con la síntesis algebraica, lo que les permitirá mediante las ecuaciones pasar de la Geometría al Álgebra y del Álgebra a la Geometría.

La forma más esmerada del *Análisis* y la *Síntesis* la aplica Pappus en el *Tesoro del Análisis*, describiendo cómo para comprobar la validez y encontrar la prueba de un teorema o resolver un problema –en general de construcción– se procede analíticamente, asumiendo por el momento que el teorema en cuestión es válido o que el problema está resuelto. Siguiendo entonces las implicaciones lógicas del teorema o la solución del problema, se llega a alcanzar una solución conocida que es verdadera o falsa. Si se trata de un teorema, de una falsa conclusión resulta la invalidez del teorema, y entonces del mismo *Análisis* resulta la refutación del teorema por reducción al absurdo; pero, si la conclusión obtenida a través del Análisis es verdadera, nada se puede decir de la validez del teorema. Es decir, el método de Análisis produce una cadena de inferencias que lleva de una premisa de valor verdadero desconocido a una conclusión de valor verdadero conocido; la falsedad de la conclusión implica la de la premisa, pero la verdad de la conclusión no dice nada acerca de la de la premisa, a menos que, como señalaba Platón, uno pueda dar la vuelta a la inferencia. La eficiencia del *Análisis* es doble, por una parte abundan los teoremas geométricos que tienen un recíproco válido, y por otra, cuando el recíproco de un teorema no es válido puede llegar a serlo añadiendo ciertas condiciones suplementarias, que eran llamadas por los griegos "diorismos". Gran parte de la investigación geométrica consistía en la búsqueda del *diorismo* adecuado para poder invertir una inferencia. Una vez que se ha hallado el *diorismo*, la inferencia invertida constituye una *Síntesis*, es decir la rigurosa demostración del teorema. Las considerables dificultades inherentes a la inversión de inferencias propiciaron que los grandes matemáticos griegos se expresaran en sus obras mediante formales demostraciones sintéticas de los resultados que habían obtenido aplicando el método de *Análisis*. Es decir, el Análisis geométrico griego era una fecunda heurística geométrica, el instrumento fundamental de investigación y creación matemática; pero, alcanzada tras el *Análisis*, la *Síntesis*, en presencia de la demostración sintética cualquier análisis era superfluo y como tal se suprimía de los grandes tratados. De esta forma, los griegos ocultaban la forma y el camino utilizados en la obtención de sus magníficos resultados matemáticos.

Cuando a partir del Renacimiento tiene lugar la recuperación, reconstrucción y divulgación del legado clásico griego, los matemáticos lo acogen con entusiasmo, pero preocupados porque el estilo sintético y apodíctico de exposición de la Geometría griega, y en particular de las obras de Euclides, Arquímedes y Apolonio, privaba a los investigadores de la forma en que habían sido descubiertos los resultados, manifiestan junto a su admiración, una cierta perplejidad y extrañeza. Incluso algunos (Torricelli, Barrow, Wallis,...) sospechaban, sin fundamento, que los griegos disponían de algún instrumento (¿el Álgebra?), un determinado tipo de Análisis Geométrico, pero que lo habían ocultado de forma tan perfecta que a los modernos matemáticos les había resultado más fácil inventar un nuevo Análisis (la *Geometría Analítica*) que recuperar el antiguo. Quizá es Descartes quien con mayor claridad muestra la insatisfacción de una curiosidad frustrada por la ocultación de los métodos de descubrimiento de la Geometría griega. Así, por ejemplo, en la regla IV de las *Regulae* [R.AT.X.371-379], Descartes escribe:

> "... En las más fáciles de las ciencias, la Aritmética y la Geometría, vemos con toda claridad que los antiguos geómetras se han servido de cierto Análisis, que extendían a la resolución de todos los problemas, si bien privaron de él a la posteridad ... Cuando por primera vez me dediqué a las disciplinas Matemáticas, de inmediato leí por completo la mayor parte de lo que suelen enseñar sus autores, y cultivé preferentemente la Aritmética y la Geometría, ..., pero no caían en mis manos autores que me satisficieran plenamente, ..., leía cosas acerca de los números que yo comprobaba, habiendo hecho cálculos, ser verdaderas; y lo mismo respecto de las figuras; ... Pero por qué esto era así, y cómo eran halladas, no parecían mostrarlo suficientemente a la mente, ... Pero como después pensase por qué sucedía que antiguamente los primeros creadores de la Filosofía no quisieran admitir para el estudio de la sabiduría a nadie que no supiese Mathesis, ..., tuve la sospecha de que ellos conocían cierta Mathesis muy diferente de la Matemática vulgar de nuestro tiempo ...Y ciertamente me parece que vestigios de esta verdadera Mathesis aparecen en Pappus y Diofanto, ... Y fácilmente creería que después fue ocultada por cierta audacia perniciosa por los mismos escritores; pues así como es cierto que lo han hecho muchos artistas con sus inventos, así ellos temieron quizá que, siendo tan fácil y sencilla, se envileciese después de divulgada; y para que les admirásemos prefirieron presentarnos en su lugar, como productos de su método, algunas verdades estériles deducidas con sutileza, en vez de enseñarnos el método mismo que hubiera hecho desaparecer por completo la admiración. Ha habido, finalmente, algunos hombres de gran talento que se han esforzado en este siglo por resucitarla; pues aquel arte no parece ser otra cosa, que lo que con nombre extraño llaman Álgebra, con tal que pueda zafarse de las múltiples cifras e inexplicables figuras de que está recargado a fin de que no falte ya aquella claridad y facilidad suma que suponemos debe haber en la verdadera Mathesis ...".

Este texto es fundamental para poder entender la actitud mental de Descartes sobre su magno proyecto de reforma de la Matemática de donde surgen las fuentes de su *Geometría Analítica*. Como señala Descartes, en la pléyade de geómetras griegos, Pappus fue una excepción, porque desarrolló una singular metodología en la forma de exposición, codificando todo un cuerpo de tratados analíticos de solución de problemas en el llamado *Tesoro del Análisis* del Libro VII de *La Colección Matemática*. En estos tratados queda patente el camino que sigue la investigación matemática ya que se procede a la reducción de un problema dado a un problema equivalente cuya solución era ya conocida. Desgraciadamente la obra de Pappus fue ignorada o desconocida por los escritores árabes, intermediarios en el tránsito a occidente de la cultura clásica griega, permaneciendo oculta en manuscritos griegos originales que vieron de nuevo la luz en los siglos XVI y XVII, bajo el nuevo espíritu humanista de Commandino, Maurólico, Vieta, Fermat y otros muchos, que se propusieron la traducción, recuperación y restauración de las obras antiguas.

Si Descartes hubiera conocido la obra de Arquímedes *El Método relativo a los teoremas mecánicos* –descubierta por el gran helenista J.L.Heiberg, en un palimpsesto medieval, en 1906–, la excepción que hace con Pappus tal vez la hubiera extendido con toda razón a Arquímedes, ya que estos matemáticos son los únicos en toda la Geometría griega que dan a conocer la vía heurística de los descubrimientos, vía analítica en el caso de Pappus y también vía mecánica en el de Arquímedes.

EL *TRACTATUS DE LATITUDINIBUS FORMARUM* DE ORESME

Si el trabajo de Apolonio es el primer estadio histórico sobre la aplicación de *coordenadas*, es decir, ciertas líneas, introducidas *a posteriori*, como ejes auxiliares de coordenadas determinados por la figura curva dada *a priori*; la obra de Oresme (1323-1382) representa el segundo estadio en la introducción de las coordenadas, pero ahora el sistema de coordenadas se introduce a priori para representar los puntos de la curva. Oresme realiza este trabajo en su obra *Tractatus de latitudinibus formarum* (escrito hacia 1362) donde desarrolla la teoría de la "latitud de las formas". Oresme escribe: "Todo lo que varía, se puede imaginar como una cantidad continua representada por un segmento rectilíneo".

Para facilitar la comprensión de la evolución de un fenómeno, Oresme introduce la noción de gráfico como elemento descriptivo de la variación de una magnitud –que llama «cualidad»– en función de otra magnitud. Así introduce lo que denomina representación gráfica de «las intensidades de la cualidades», germen de nuestra representa-ción gráfica de funciones en un sistema de coordenadas, uno de los aspectos esenciales de la *Geometría Analítica*. Elegido un punto origen en una recta horizontal, Oresme llama «longitudo» (longitud) a nuestra *abscisa*, que es el tiempo o el espacio, y eleva una perpendicular, la «latitudo» (latitud), nuestra *ordenada*, que es proporcional a la intensidad o amplitud del fenómeno, ya sea velocidad, calor u otros. No obstante, para Oresme esta variación no se refleja como en la *Geometría Analítica* por la curva descrita por los puntos de *longitud* y *latitud* dadas, sino por la figura total, es decir, el área que determina esa curva, el eje de las longitudes y las intensidades inicial y final, que Oresme llama simplemente «figura».

En la obra de Oresme hay un estudio matemático de las figuras planas que producen las representaciones gráficas de las *cualidades*. Oresme considera varios géneros de formas que darán lugar a otras tantas formas de representación geométrica lo que le conduce a aplicar la Teoría de la *latitud* de las formas al estudio del movimiento; de este modo se anticipa a la Cinemática de Galileo. Oresme establece que el área bajo el gráfico velocidad-tiempo repre-senta la distancia recorrida (*Principio de Oresme*) y obtiene una verificación geométrica del famoso *Teorema de Merton*.

Encontramos en Oresme un incipiente desarrollo de *Geometría Analítica* y Cálculo Infinitesimal. La verdadera innovación de Oresme es la representación gráfica de una cantidad variable mediante *coordenadas* y en este aspecto el trabajo de Oresme se desarrolla en el sentido positivo de la *Geometría Analítica*. Pero Oresme no recorre el otro sentido de la *Geometría Analítica*, es decir, no desarrolla el principio de que toda curva plana puede ser representada, con respecto a un sistema de coordenadas, como una función de una variable. Oresme está más bien interesado por las cuestiones de la variación de las formas (es decir, los aspectos diferenciales) así como por la variación del área bajo la curva (es decir, los aspectos integrales), más que por el estudio analítico de la curva. Así pues, Oresme se acercó más al *Cálculo Infinitesimal* que a la *Geometría Analítica*.

EL ANÁLISIS ALGEBRAICO-GEOMÉTRICO DEL *ARTE ANALÍTICA* DE VIETA

Con profunda inspiración en Diofanto y Pappus, Vieta (1540-1603) publica en 1591 *Introducción al Arte Analítico* (*In artem analyticem isagoge*), obra que instaura una nueva tradición matemática mediante un auténtico programa de investigación que intenta recuperar el *Análisis Geométrico* de los antiguos mediante la acción del Álgebra. Al considerar que el carácter algorítmico del Álgebra podría intensificar las aptitudes heurísticas del Análisis, Vieta destila un auténtico *Análisis Algebraico*, que Descartes y Fermat desarrollarán en la línea de una verdadera *Geometría Analítica*.

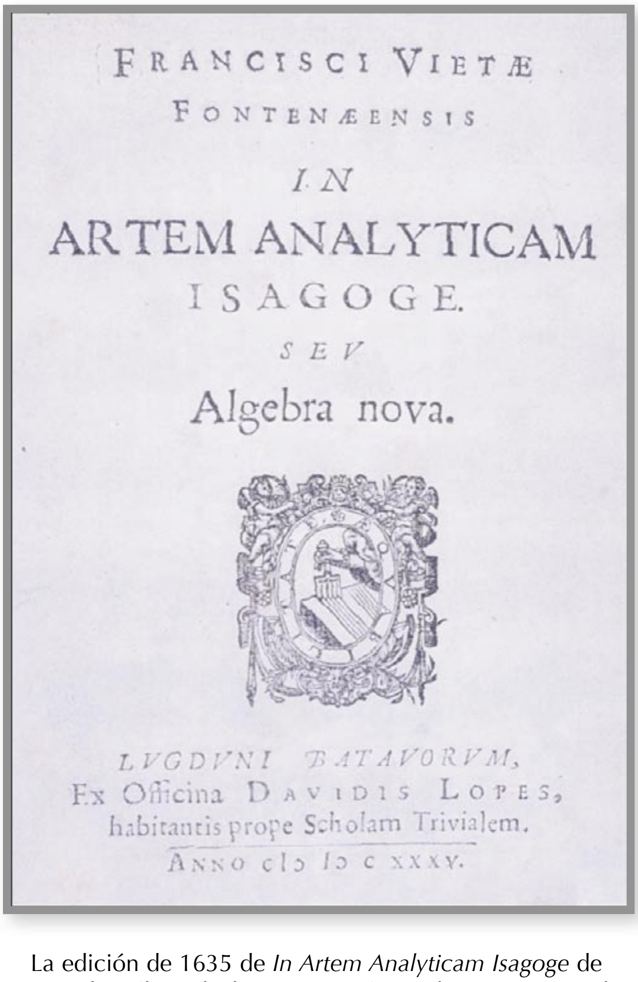
El *Arte Analítica* de Vieta perfecciona el Álgebra sincopada de Diofanto y de los matemáticos árabes y renacentistas, e inicia el cálculo literal del Álgebra simbólica mediante la introducción de los parámetros, que permiten obtener la solución general de las ecuaciones mediante fórmulas que expresan las incógnitas –representadas por vocales– en función de los parámetros –indicados por consonantes–. Ya que los parámetros no permiten obtener un resultado numérico concreto tras las operaciones combinatorias que conducen a la resolución de una ecuación, sino una solución simbólica, Vieta trasciende la *logistica numerosa* ordinaria, aplicada al cálculo con números, y alcanza la *logistica speciosa* que trata con las especies, siendo éstas cualquier tipo de magnitud, en particular elementos geométricos como ángulos o longitudes. Esto quiere decir que las cantidades simbólicas del *Arte Analítica* al ser interpretadas como magnitudes geométricas y las operaciones simbólicas como procedimientos de construcción geométrica, permiten obtener la solución simbólica de las ecuaciones generales con significado geométrico, de modo que el *Arte Analítica* podía ser aplicado no sólo a los problemas numéricos sino también a problemas geométricos. De esta forma, el *Arte Analítica* de Vieta que tuvo su origen en el *Tesoro del Análisis* de Pappus, revierte sobre éste, de manera que su contenido es traducido al lenguaje simbólico del Arte, es decir, mediante el concurso del Algebra simbólica, Vieta puede reconstruir, en términos algebraicos, el Análisis Geométrico clásico, lo que prepara el terreno para el advenimiento de las Geometrías Analíticas de Fermat y Descartes.

El *Álgebra Geométrica* de los griegos ya usaba de forma retórica magnitudes geométricas como incógnitas. La gran novedad de Vieta estriba en la aplicación a problemas geométricos del simbolismo literal con todo el potencial de la mecánica algorítmica operatoria de cálculo, manipulación y simplificación, es decir, la traslación de un problema de Geometría al Álgebra para su resolución, un aspecto esencial de la futura *Geometría Analítica*. El tránsito desde el Álgebra sincopada hacia la incipiente Álgebra simbólica, permite a Vieta, pasar de la consideración de proporciones en la definición de una curva, al establecimiento de ecuaciones, aspecto muy importante que aplicará Fermat, en los avances de su *Geometría Analítica*, para hacer evolucionar el *symptoma* de Apolonio, como expresión de las curvas en forma de proporción, hacia la *ecuación característica* de la curva(3).

En la aplicación que hace Vieta del Álgebra a la Geometría no se encuentra el uso de coordenadas, con motivo de que no incluye el estudio de lugares. Como consecuencia, en Vieta no aparece la representación gráfica de ecuaciones en un sistema de coordenadas. De hecho Vieta evitó el estudio geométrico de las ecuaciones indeterminadas. Para Vieta, las vocales, en puridad, no son todavía variables en el sentido de símbolos que representen cualquier cantidad de un conjunto de valores. Y es que la notación de vocales y consonantes es aplicada por Vieta sólo a ecuaciones determinadas en una sola incógnita, de modo que las vocales no pasan de ser meras constantes que actúan como cantidades desconocidas (incógnitas). Sólo cuando las notaciones convencionales son aplicadas, mas tarde, por Fermat y Descartes, a la representación gráfica de ecuaciones indeterminadas, puede decirse que las vocales (que conservará Fermat) o las equivalentes x,y,z, cartesianas, serán auténticas variables. En ese momento, la transición iniciada por Vieta con sus ideas algebraicas plasmadas en su notación literal, desembocará en las Geometrías Analíticas de Fermat y Descartes. Si Vieta, con su formidable aparato algebraico, hubiera aplicado coordenadas se habría adelantado a la Geometría de Descartes en medio siglo. Así que el trabajo de Vieta representa un resurgimiento de la Geometría clásica griega bajo el amparo del nuevo Álgebra simbólica, más que *Geometría Analítica* propiamente dicha. La obra de Vieta tuvo una contribución decisiva en la generación de las Geometrías Analíticas de Fermat y Descartes, pero ella misma es un claro ejemplo de que la *Geometría Analítica* es algo más que una mera combinación de Álgebra y Geometría, es decir, necesita como ingredientes ineludibles para poder circular del Álgebra a la Geometría y de la Geometría al Álgebra no sólo el Álgebra simbólica sino también el uso de las coordenadas.

Menecmo, Apolonio y Pappus utilizaron el equivalente de un sistema de coordenadas pero carecieron del Álgebra simbólica, mientras que Vieta dispuso del instrumento algorítmico del Álgebra simbólica pero no llegó a utilizar coordenadas. El descubrimiento de la *Geometría Analítica* por parte de Fermat y Descartes tendrá lugar al aunar ambos aspectos en el estudio de las curvas: la introducción de coordenadas y la mecánica operatoria del Álgebra simbólica en la aplicación a los lugares definidos por una ecuación en dos incógnitas. Por eso Fermat y Descartes son tributarios tanto de Apolonio y Pappus como de Vieta.

Hay otro aspecto en Vieta, en relación con el uso que hace del término *Análisis*, de una gran incidencia sobre la aparición de la *Geometría Analítica*. Tal como había sido usado por Platón y Pappus, la palabra *Análisis* hacía referencia al orden de las ideas en una demostración. El *Análisis* es la descomposición en elementos más simples que se hace en el camino de la investigación; la *Síntesis* es la composición o reordenación que se hace en la exposición. Vieta aplica la palabra *Análisis* en la Geometría algebraica, considerada como una nueva forma de Análisis matemático y usa el término bajo el significado de los griegos, pero remarca que en la fase de ataque algebraico del problema se



FRANCISCI VIETÆ
FONTENÆENSIS
IN
ARTEM ANALYTICAM
ISAGOGE.
SEV
Algebra nova.

LVGDVNI BATAVORVM,
Ex Officina DAVIDIS LOPES,
habitantis prope Scholam Trivialem.
ANNO CIƆ IƆ C XXXV.

La edición de 1635 de *In Artem Analyticam Isagoge* de Vieta. El Análisis algebraico-geométrico de Vieta, inspirado en la obra de Diofanto y Pappus es un estadio intermedio esencial en el camino que arranca del Álgebra Geométrica de los griegos y confluye en las Geometrías Analíticas de Fermat y Descartes procede indirectamente a base de asumir lo que se quiere probar o construir y se opera con las cantidades incógnitas como si fueran conocidas. Descartes reproduce en el segundo epígrafe del Libro I de *La Geometría* estas ideas sobre a la aplicación del *Análisis* [G.AT,VI,372]:

> "Así, si se quiere resolver algún problema, debe de antemano considerarse como ya resuelto, ... Luego, sin considerar ninguna diferencia entre estas líneas conocidas y desconocidas,..."

Así pues, con Vieta, el Álgebra se convierte en el instrumento adecuado para emprender el camino analítico en Geometría, aplicando las técnicas simbólicas sobre la *logistica speciosa*.

LA GEOMETRÍA DE DESCARTES Y LA *ISAGOGE* DE FERMAT

Las Geometrías Analíticas de Fermat y Descartes nacen de forma casi simultánea en un periodo histórico, el siglo XVII, en el que acontece una auténtica eclosión de nuevas ramas de la Matemática: Cálculo Infinitesimal –en su doble vertiente diferencial e integral–, Cálculo de Probabilidades, Teoría de Números y Geometría Proyectiva. Es una época en la que se ha alcanzado el grado máximo de recuperación y asimilación del legado matemático griego de modo que las obras de Euclides, Arquímedes, Apolonio, Diofanto y Pappus, traducidas al latín e incluso a las lenguas vernáculas inundan literalmente los ambientes científicos.

El apasionado interés por el mundo matemático clásico de los griegos va más allá incluso de la recuperación y difusión de los grandes tratados traducidos, al pretender la restauración del material perdido a lo largo de los siglos. En efecto, la impresión ante los resultados y el desconocimiento de los métodos de descubrimiento de la Matemática griega provoca que la época esté dominada por un espíritu de reconstrucción de las obras perdidas de la antigüedad, sobre todo las de Apolonio, tal vez movida por la conjetura de que al reconstruir los libros perdidos, se podría descubrir el procedimiento que utilizaban los griegos para obtener sus brillantes resultados, es decir, "el método", que nunca habían desvelado, salvo en el caso exclusivo del Análisis Geométrico de Pappus. Sabemos que en esta actividad de reconstrucción –la de *Los Lugares Planos* de Apolonio (*Apolonii Pergaei libri duo de locis planis restituti*)– está el origen del trabajo de Fermat sobre *Geometría Analítica*, la *Isagoge*.

Como consecuencia de la aparición de los inconmensurables, el *Álgebra Geométrica* de los griegos estructura casi toda la Matemática griega, con una rigidez que obliga a un tratamiento sintético de los problemas y esclaviza a depender de la naturaleza geométrica intrínseca de las figuras, de modo que cada problema exige un tratamiento local que atomiza la casuística de los casos específicos y precisa de sutiles construcciones geométricas para cada caso particular. Es decir, cada demostración de la Geometría euclídea exigía nuevos e ingeniosos argumentos originales y estaba tan ligada a las figuras que "que no puede ejercitar el entendimiento sin fatigar mucho la imaginación", como diría Descartes [DM.AT,VI,17]. Pero lo más grave, como se ha reiterado con insistencia, era la ocultación del procedimiento y el método de descubrimiento. Incluso Descartes llega a decir que "...los antiguos no poseían un verdadero método,...," sino "ellos no hubieran escrito libros tan voluminosos [para resolver las cuestiones geométricas],..." [G.AT,VI,376].

Las Geometrías Analíticas de Fermat y Descartes nacen, precisamente, del interés de ambos por la metodología. Como escribe Kline (1985, p.51): "Las contribuciones de Descartes a las Matemáticas propiamente dichas no ofrecieron nuevas verdades, sino, más bien, una sólida metodología que ahora llamamos Geometría Analítica". Tanto la Isagoge de Fermat como *La Geometría* de Descartes tienen su anclaje en la Geometría Griega, pero se plantean como tarea esencial encontrar nuevos métodos más simples, más operativos, más resolutivos, más heurísticos y sobre todo más generales. Así parece pronunciarse Fermat justo desde el comienzo de la Isagoge [TH.OF.III.85]. Y en el caso de Descartes, la intencionalidad es palmaria hasta en el propio título de la obra de la que es tributaria *La Geometría*, que la llama *Discours sur la Méthode*,..., en la que Descartes plasma, de forma clara y distinta, "el método para dirigir correctamente la razón y buscar la verdad en las ciencias", es decir, primero el método, después la ciencia que resulta de su fiel aplicación.

Bajo esta filosofía de trabajo, Fermat y Descartes son los principales artífices de la inflexión radical que presenta la Matemática del siglo XVII respecto a la clásica griega, que es ponderada y es la fuente de formación y de inspiración de los matemáticos, pero se abandonan y critican sus métodos porque no son heurísticos. Con un nuevo enfoque se trata de crear y descubrir, más que de expresar demostrativamente o axiomáticamente. Es más relevante la forma de resolución de los problemas que el estilo de la presentación. No importa tanto la expresión rigurosa como la aplicación de métodos que permitan resolver de forma directa y operativa los problemas y escribirlos formalmente siguiendo la línea de la propia investigación geométrica, es decir, métodos que al describir el proceso inventivo enseñen a descubrir y rompan la clásica dualidad helénica *invención-demostración* que tiene lugar en dos estadios de tiempo y espacio diferentes. Se pondera la heurística y se busca afanosamente la fusión –en un solo acto intelectual matemático– del descubrimiento y de la demostración. Pues bien, aquí es donde interviene el Álgebra.

Con su *Arte Analítica*, Vieta había establecido una conexión entre Álgebra y Geometría, al obtener las ecuaciones que corresponden a diversas construcciones geométricas, para problemas geométricos determinados, donde se utilizan sólo ecuaciones determinadas, en que la variable, aunque sea una incógnita, es una constante fija a encontrar. Fermat y Descartes desarrollan esta idea para problemas geométricos indeterminados mediante la consideración de ecuaciones indeterminadas en variables continuas que representan segmentos geométricos. El Principio Fundamental de la *Geometría Analítica*, expresado en lenguaje moderno, considera que las ecuaciones indeterminadas en dos incógnitas, $f(x,y)=0$, se corresponden con lugares geométricos, en general curvas, determinadas por todos los puntos cuyas coordenadas relativas a dos ejes satisfacen la ecuación. Un aspecto de esta idea es expresada por Descartes, en el Libro II de *La Geometría* [G.AT,VI, 412]:

> "Para encontrar todas las propiedades de las líneas curvas basta con saber la relación que tienen todos sus puntos con los de las líneas rectas,...".

El aspecto complementario de la idea de Descartes es expresado por Fermat casi al comienzo de la *Isagoge* con estas lacónicas palabras [TH.OF.III.85]:

> "Siempre que en una ecuación final se encuentran dos cantidades incógnitas, se tiene un lugar geométrico, describiendo el extremo de una de ellas una línea recta o curva".

En ambas frases se compendian uno de los principios más importantes de la Historia de la Matemática, que instaura los fundamentos de la *Geometría Analítica*. El conocimiento de la relación que liga los segmentos o "las líneas rectas" que hacen la función de *coordenadas* de los puntos de una curva, es decir, la ecuación de la curva, es un elemento esencial para desentrañar las propiedades y elementos de la curva. La ecuación de la curva realiza un tránsito de la Geometría al Álgebra, que, por su carácter operacional, permite, mediante cálculos y resolución de ecuaciones, regresar a la Geometría, para encontrar y solucionar cuestiones geométricas, de modo que se establece una correspondencia entre las propiedades algebraicas de la ecuación y las propiedades geométricas de la curva asociada. De esta forma la resolución de un problema de Geometría se traslada de forma muy eficaz a resolverlo en Álgebra y, además, ésta se convierte en un poderoso instrumento de investigación geométrica y de lenguaje de expresión de los resultados.

Fermat y Descartes desarrollan una *Geometría de ordenadas* más que una *Geometría de coordenadas*, ya que fijadas las dos incógnitas que componen la ecuación, los segmentos de la primera se miden a partir de un punto inicial –*origen de coordenadas*–, a lo largo de un eje dado y los segmentos de la segunda –que son determinados por la ecuación– se elevan como *ordenadas* formando un ángulo con el eje. Así resultan lo que Descartes llama por primera vez en el *Problema de Pappus* "líneas principales de referencia" [G.AT,VI,383], con las que se responde a la pregunta crucial ¿cómo se logra la reducción de la figura geométrica a su ecuación? Como escribe Gómez Pin (1984, p.122):

> "Analizando lo complejo a partir de lo simple, dirá Descartes. Y lo simple en Geometría cartesiana, es la recta, cuya iteración en sucesivas dimensiones (largo, ancho, altura) proporciona un principio ordenador, el sistema de coordenadas cartesianas, con respecto al cual las curvas son expresables unívocamente mediante ecuaciones" [G.AT.VI.392].

He aquí la influencia del segundo precepto cartesiano del *Discurso del Método* (*Regla del Análisis* [D.M.AT.20]), que extraída como las otras tres de la Matemática, revierten en ella.

Ya vimos que en ciertos pasajes de la Geometría griega (por ejemplo, en *Las Cónicas* de Apolonio) ciertas líneas, que jugaban un papel de coordenadas, se asociaban a una curva dada, de modo que mediante Algebra retórica eran expresadas en función de esas líneas las propiedades de la curva. La idea clave de Fermat estriba en poder invertir esta situación al establecer que una ecuación algebraica en dos incógnitas define, con respecto a un sistema de *coordenadas*, un lugar geométrico de puntos, es decir una curva. Fermat se dio cuenta de que las relaciones de áreas, expresadas según el *Álgebra Geométrica* de los griegos en forma de proporción, mediante las que Apolonio escribía las propiedades intrínsecas de las cónicas, se prestaban con gran facilidad a ser traducidas al lenguaje de ecuaciones del Álgebra simbólica de Vieta. De esta forma el *symptoma* de la curva de *Las Cónicas* de Apolonio, forma retórica de expresión de la curva, evolucionaba hacia la *ecuación característica* de la curva. Al vincular los trabajos de Apolonio y de Vieta, Fermat concibe su *Geometría Analítica* que establece un efectivo puente entre la Geometría y el Álgebra, que le permitirá asociar curvas y ecuaciones, a base de aplicar el *Análisis Algebraico* de Vieta a los problemas de lugares geométricos de Apolonio y Pappus, definidos, en un sistema de coordenadas, por una ecuación indeterminada en dos incógnitas. De este modo, Fermat resolverá los problemas del *Análisis Geométrico* de los griegos mediante la mecánica operatoria del Álgebra simbólica. Con la *Geometría Analítica* de Fermat se alcanzaba el máximo grado de eficacia en la aplicación a los problemas geométricos del antiguo método de *Análisis* y de ahí procede el adjetivo *Analítica* que acompaña al sustantivo Geometría.

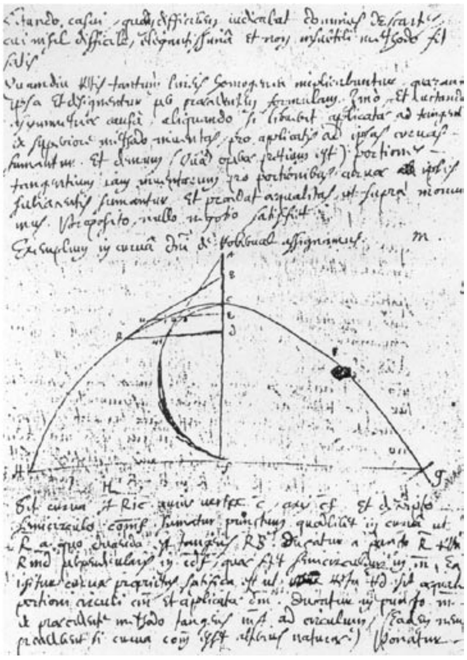
Por su parte, Descartes elabora un potente método analítico-sintético de ataque de los problemas geométricos que utiliza el Álgebra como instrumento algorítmico. A base de fundir el Análisis Geométrico de los antiguos ("siempre tan constreñido a considerar las figuras" [DM.AT,VI,17)]) y el Álgebra de los modernos ("que se ha hecho un arte confuso y oscuro" [DM.AT,VI,17)]), introducir una revolucionaria simplificación en la notación ("explicar [las relaciones o proporciones] mediante algunas cifras lo más cortas que fuera posible" [DM.AT,VI,20]), indicando "cómo pueden emplearse letras en geometría" [G.AT,VI,371], reconstruir de forma geométrico-algebraica las operaciones aritméticas, es decir, mostrar "cómo el cálculo de la aritmética se relaciona con las operaciones de geometría" [G.AT,VI, 369], enseñar "cómo se llega a las ecuaciones que sirven para resolver los problemas" [G.AT,VI,372] y "cómo se resuelven" [G.AT,VI,374] estas ecuaciones (es decir, cómo se construyen las soluciones), Descartes "tomaría lo mejor del Análisis geométrico y del Álgebra y corregiría los defectos del uno por medio de la otra" [DM.AT,VI, 20]. He aquí un ambicioso programa de reforma de la Matemática.

Descartes se propone no sólo rehacer la Geometría griega, sino crear un nuevo método para la resolución de antiguos y nuevos problemas que rompe de forma definitiva con la tradición griega y llega incluso a suplantarla, mientras que Fermat, más modesto, considera su trabajo como una reformulación de la obra de Apolonio con los instrumentos del Álgebra, es decir, una paráfrasis algebraica de *Las Cónicas* de Apolonio. La potencia de los métodos algebraicos, corresponde a Descartes, pero la idea matriz de la *Geometría Analítica* que es la de asociar ecuaciones a curvas quizá está más clara en Fermat. Por eso el enfoque de Descartes es algo diferente al de Fermat. Éste expone mucho más claramente que aquél el principio básico de que una ecuación con dos incógnitas es una expresión algebraica de las propiedades de una curva y su trabajo está orientado al desarrollo y aplicación de esta fructífera idea. Mientras Descartes había sugerido en *La Geometría* clases de nuevas curvas engendradas por simples movimientos, Fermat introduce grupos de curvas dadas por sus ecuaciones algebraicas. De hecho la *Isagoge* de Fermat tiene su propósito en demostrar que las ecuaciones lineales representan rectas y las cuadráticas corresponden a cónicas.

En un sentido general, se puede decir que la invención de la *Geometría Analítica* por Descartes consiste en la extensión del *Arte Analítica* de Vieta a la construcción geométrica de las soluciones de ecuaciones indeterminadas, mientras que para Fermat fue el estudio de los lugares geométricos mediante el *Arte Analítica* de Vieta. Abundando en ello, digamos que mientras Descartes empieza con la curva correspondiente a un lugar geométrico de la que deriva la ecuación del lugar, es decir, resuelve problemas geométricos a través de la construcción de la solución geométrica de ecuaciones, Fermat inversamente parte de una ecuación algebraica de la que deriva las propiedades geométricas de la curva correspondiente. En sus propias palabras, Descartes se refiere con frecuencia a la generación de curvas "mediante un movimiento continuo y regular", mientras Fermat menciona la frase: "Sea una curva dada por su ecuación...". Las visiones de Descartes y Fermat son, en cierto modo, complementarias, estableciendo cada una de ellas el nexo entre Álgebra y Geometría en sentidos opuestos. Descartes estudia ecuaciones por medio de curvas, mientras Fermat estudia curvas definidas por ecuaciones. La Geometría que desarrollan Fermat y Descartes, que al cabo de doscientos años se empezó a llamar Geometría Analítica, estudia dos tópicos fundamentales: la derivación de las ecuaciones de los lugares geométricos y el estudio de las propiedades de las curvas –sobre todo las definidas por ecuaciones lineales y cuadráticas– mediante el Álgebra. Sintetizando, diríamos que Descartes se ocupó ampliamente del primer tópico y consideró brevemente algunos aspectos del segundo, mientras que Fermat desarrolló el segundo tópico y prestó somera atención al primero.

Sello emitido en 2001 con motivo del Cuarto Centenario del nacimiento de Fermat

LA GEOMETRÍA ANALÍTICA DE LA *ISAGOGE* DE FERMAT



1. Dibujo a plumilla de la tradicional efigie de Fermat

2. Página con la tangente a la cicloide del manuscrito autógrafo *Doctrinam Tangentium* (1640), la última memoria de Fermat sobre las tangentes a las líneas curvas

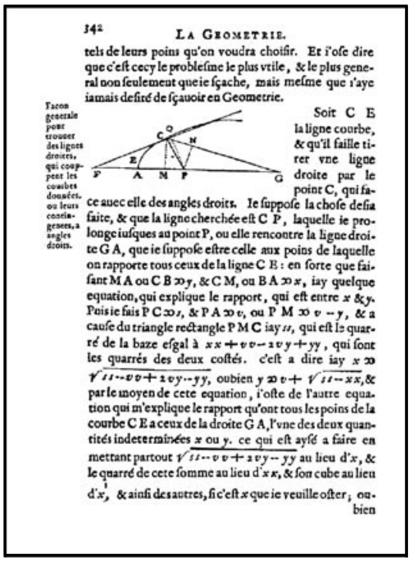
Fermat poseía una asombrosa erudición matemática, obtenida mediante un meticuloso estudio de las obras de Euclides, Arquímedes Apolonio, Diofanto y Pappus, lo que propició su irrefrenable afición a la Matemática, así como su encomiable labor de comentario de los más brillantes matemáticos griegos y en el caso de Apolonio incluso de reconstrucción.

La Geometría Analítica de Fermat tiene su origen en su profundo conocimiento de la Geometría de Euclides, Apolonio y Pappus y su exégesis o paráfrasis mediante el algoritmo algebraico del *Arte Analítica* de Vieta, que permitía superar la insuficiencia de los métodos sintéticos de la Geometría griega –que separaban la *invención* de la *demostración*– para fundir en único acto matemático lo heurístico y lo apodíctico, es decir, el descubrimiento y la prueba.

Fermat advirtió que las relaciones de áreas, expresadas en forma de proporción mediante el *Álgebra Geométrica* euclídea, utilizadas por Apolonio para describir las propiedades intrínsecas de las cónicas, eran fácilmente traducibles al lenguaje de ecuaciones del Álgebra simbólica de Vieta. De esta manera la forma retórica de la expresión de la curva en el lenguaje pitagórico de la *Aplicación de las Áreas* se convertía en la llamada *ecuación característica* de la curva de la *Introducción a los Lugares Planos y Sólidos* (*Ad Locos Planos et Solidos Isagoge*) de Fermat. He aquí el núcleo de su Geometría Analítica que erige un tránsito entre la Geometría y el Álgebra al asociar curvas y ecuaciones, a base de aplicar el Análisis algebraico de Vieta a los problemas de lugares geométricos de Apolonio y Pappus, definidos en un sistema de coordenadas, por una ecuación indeterminada en dos incógnitas. Con la Geometría Analítica de Fermat se logra el grado sumo de aplicación del antiguo método de *Análisis* a los problemas geométricos, de donde procede el adjetivo Analítica que acompaña al sustantivo Geometría.

La Geometría Analítica se convierte enseguida, en la mente de Fermat, en un poderoso instrumento de investigación geométrica, mediante el que Fermat pudo resolver de forma sorprendente y brillante, antiguos y nuevos problemas, en particular numerosas cuestiones de lugares geométricos, extremos y tangentes, cuadraturas, cubaturas y rectificación de curvas.

LA GEOMETRÍA DE DESCARTES Y LA GEOMETRÍA ANALÍTICA



342 LA GEOMETRIE.

tels de leurs poins qu'on voudra choisir. Et i'ose dire que c'est cecy le problesme le plus vtile, & le plus general non seulement que ie sçache, mais mesme que i'aye iamais desiré de sçauoir en Geometrie.

Façon generale pour trouuer des lignes droites, qui couppent les courbes données, ou leurs contingentes, a angles droits.

Soit C E la ligne courbe, & qu'il faille tirer vne ligne droite par le point C, qui face auec elle des angles droits. Ie suppose la chose desia faite, & que la ligne cherchée est C P, laquelle ie prolonge iusques au point P, ou elle rencontre la ligne droite G A, que ie suppose estre celle aux poins de laquelle on rapporte tous ceux de la ligne C E: en sorte que faisant M A ou C B ∞ y, & C M, ou B A ∞ x, iay quelque equation, qui explique le rapport, qui est entre x & y. Puis ie fais P C ∞ s, & P A ∞ v, ou P M ∞ $v - y$, & a cause du triangle rectangle P M C iay ss, qui est le quarré de la baze esgal à $xx + vv - 2vy + yy$, qui sont les quarrés des deux costés. c'est a dire iay x ∞ $\sqrt{ss - vv + 2vy - yy}$, oubien y ∞ $v + \sqrt{ss - xx}$, & par le moyen de cete equation, i'oste de l'autre equation qui m'explique le rapport qu'ont tous les poins de la courbe C E a ceux de la droite G A, l'vne des deux quantités indeterminées x ou y. ce qui est aysé a faire en mettant partout $\sqrt{ss - vv + 2vy - yy}$ au lieu d'x, & le quarré de cete somme au lieu d'xx, & son cube au lieu d'x^3, & ainsi des autres, si c'est x que ie veuille oster; oubien

1. Dibujo a plumilla de la tradicional efigie de Descartes

2. Página de la edición de 1637 de *La Geometría* de Descartes relativa al trazado de rectas normales a las curvas, donde Descartes aplica uno de los Principios fundamentales de la Geometría Analítica (G.AT,VI, 412): "Para encontrar todas las propiedades de las líneas curvas basta con saber la relación que tienen todos sus puntos con los de las líneas rectas". Esta sentencia contiene uno de los principios más importantes de la Historia de la Matemática, que establece los fundamentos de la Geometría Analítica. La relación entre los segmentos o "las líneas rectas" que hacen la función de "coordenadas" de los puntos de una curva, es decir, la ecuación de la curva, permite conocer las propiedades y los elementos característicos de la curva. La ecuación de la curva establece, pues, una correspondencia entre las propiedades algebraicas de la ecuación y las propiedades geométricas de la curva asociada, en un tránsito de la Geometría al Álgebra y del Álgebra a la Geometría

La Geometría de Descartes transforma los antiguos instrumentos de la Geometría griega –el Álgebra Geométrica y el Análisis Geométrico– en lo que hoy llamamos la Geometría Analítica cartesiana, mediante la intervención del Álgebra literal a la que el propio Descartes contribuyó de forma definitiva con la contundente y eficaz reforma y simplificación de la notación algebraica.

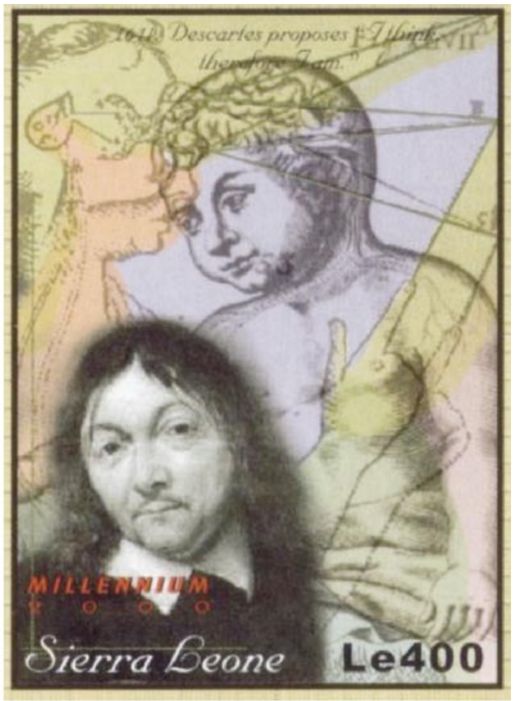
En concreto *La Geometría* de Descartes elimina de forma brillante toda una serie de limitaciones que el carácter sintético imponía a la Geometría griega:

- Limitación pitagórica de la inconmensurabilidad.
- Limitación platónica de los instrumentos geométricos –regla y compás–.
- Limitación euclídea de la homogeneidad dimensional.
- Limitación tridimensional.
- Limitación de la dependencia de las figuras geométricas.
- Limitación de la imposibilidad de asignar números a las figuras geométricas.

Descartes realiza mediante la herramienta algebraica una nueva lectura de la Geometría de los griegos, que permite una completa reconstrucción de la Matemática sobre premisas muy sencillas no geométricas como en Euclides sino algebraicas. Y lo hace en el marco de un programa de reforma general de la Filosofía que había anticipado en *El Discurso del Método* y en las *Reglas para la dirección del espíritu*, pero muchos pensadores conceden mayor importancia a la reforma cartesiana de las Matemáticas que a su intervención en la Filosofía. Así parece deducirse, por ejemplo, de la siguiente frase de J. Stuart Mill (citada por E.Bell en *Les grands mathématiciens*. Payot, París, 1950. Cap.3. p.46):

> "La Geometría analítica, mucho más que cualquiera de sus especulaciones metafísicas, inmortaliza el nombre de Descartes y constituye el máximo paso hecho en el progreso de las ciencias exactas".

LA GEOMETRÍA DE DESCARTES Y LA GEOMETRÍA ANALÍTICA



Sellos sobre Descartes emitidos con motivo del año 2000 de las Matemáticas en Granada
(reproduciendo el famoso grabado de C. Hellemans de la Biblioteca Nacional de París)
y Sierra Leona (reproduciendo el conocido retrato de Weenix del Museo de Utrecht)

Sello emitido en Francia el 9 de junio de 1937, en conmemoración del tercer centenario de la publicación de *El Discours sur la Méthode*. Reproduce el retrato de Descartes atribuido a F.Hals (Museo de Louvre). Tal vez sea el retrato más célebre de un filósofo, aunque no se puede decir con certeza que sea Descartes ni que sea de F. Hals

Los aspectos más importantes de *La Geometría* de Descartes que apuntan hacia la futura Geometría Analítica son los siguientes:

A. Preliminares geométrico-algebraicos: "Cómo el cálculo de la aritmética se relaciona con las operaciones de geometría" (G.AT,VI, 369). Descartes soslaya la inconmensurabilidad, al asignar longitudes a los segmentos, previa la adopción de un segmento unidad a discreción, tras lo cual construye de forma efectiva las operaciones aritméticas y les da un significado geométrico. De esta forma Descartes elimina "la limitación pitagórica de la inconmensurabilidad".

B. Simplificación de la notación algebraica: "Cómo pueden emplearse letras en geometría" (G.AT,VI, 371). Descartes considera un segmento de recta tanto como magnitud geométrica continua como una medida numérica, pero establece que la potencia de un segmento sigue siendo un segmento, así que cuadrado y cubo ya no son magnitudes planas o espaciales, sino la segunda o tercera potencia de un número. De este modo, las operaciones aritméticas quedan incluidas en un terreno estrictamente algebraico. Con ello Descartes elimina "la limitación euclídea de la homogeneidad". Los convenios notacionales fijados en *La Geometría* se han convertido en algo poderosamente definitivo, de modo que *La Geometría*, es el primer texto matemático en el que un lector actual no encontraría dificultades con la notación.

C. Aplicación de la metodología cartesiana del *Análisis* y la *Síntesis* en el planteamiento y resolución de ecuaciones que corresponden a los *problemas planos* (G.AT,VI, 372-376). Descartes desarrolla todo un protocolo de actuación –suponer el problema resuelto; dar nombre a todos los segmentos que parecen necesarios para representar los datos del problema, tanto los conocidos como los desconocidos; determinar la ecuación entre las longitudes conocidas y las desconocidas; resolver la ecuación resultante; construir geométricamente la solución–. Se trata de un verdadero método de resolución de problemas geométricos donde se transita de forma reversible de la Geometría al Álgebra y del Álgebra a al Geometría. En particular, Descartes exhibe de forma ostentosa eficientes métodos de resolución de ecuaciones y de construcción geométrica de las soluciones, que contrastan con la farragosidad del Álgebra Geométrica de *Los Elementos* de Euclides. Realmente aquí vemos la magnificencia y simplicidad de los métodos de *La Geometría* de Descartes en contraposición a la prolijidad y precariedad de la Geometría griega.

D. *El Problema de Pappus* (G.AT,VI, 377-387). Descartes introduce el primer sistema de coordenadas de La Geometría. Este problema fue un indicador fehaciente, ante la ciencia coetánea, de la novedad y de la inusitada potencia del método analítico cartesiano en Geometría en un asunto geométrico que desbordó a lo largo de los siglos las posibilidades del Análisis Geométrico griego.

E. Determinación de las rectas normales a una curva (G.AT,VI, 412-423). Descartes resuelve de forma prodigiosa el problema de normales y tangentes, y apunta a la asociación de curvas y ecuaciones que instaura los dos principios fundamentales de la llamada Geometría Analítica.

Según D'Alembert (*Discurso preliminar de la Enciclopedia*, Losada, Buenos Aires, 1954. p. 62).

> "Lo que ha inmortalizado el nombre de este gran hombre, es la aplicación que ha sabido hacer del Álgebra a la Geometría, una idea de las más vastas y felices que haya tenido el espíritu humano, y que será siempre la llave de los más profundos descubrimientos no solamente en la Geometría, sino en todas las ciencias físico-matemáticas".

Ponderamos la función esencial que juega el Álgebra al mecanizar la Matemática de forma que el pensamiento se simplifica y disminuye el esfuerzo de la mente ante la automatización de los procesos. Para Descartes el Álgebra debe preceder a las demás ramas de la Matemática y en cierto modo es una extensión de la Lógica, como motor del razonamiento, en la línea de lo que llamaba Matemática universal (*la Mathesis de las Regulae*). El Álgebra es la ciencia universal del razonamiento. Y al concretar sobre el ámbito geométrico, el Álgebra es la clave para reconocer los problemas de la Geometría y unificar cuestiones cuya forma geométrica no parece guardar *a priori* relación alguna. Es decir, el Álgebra aporta los principios de clasificación y jerarquía de los problemas y es el instrumento para discutir con elegancia, rapidez y plenitud las cuestiones geométricas. El Álgebra simbólica literal, con incógnitas, variables y parámetros, suprime la necesidad de tratar ejemplos específicos y casos concretos y permite formulaciones generales y procedimientos de resolución independientes de la estructura geométrica particular, que posibilita la aplicación de las mismas técnicas a situaciones análogas. Pero concretemos aún más qué función cumple el Álgebra en la *Geometría Analítica* desde el punto de vista del Análisis de los antiguos, a fin de justificar el propio nombre de *Geometría Analítica*, que algunos, no sin alguna razón, refiriéndose a Fermat y Descartes, consideran inapropiado. El término *Análisis* se aplica desde Platón y Pappus para describir el proceso de remontarse desde lo que se desea demostrar hasta llegar a alguna verdad conocida (admitida o probada anteriormente). En este sentido es lo opuesto a la *Síntesis*, que es la presentación deductiva de lo que se halló mediante el *Análisis*. Es bajo estas concepciones que todavía Vieta, Fermat y Descartes consideraban el Análisis para describir la aplicación del Álgebra a la Geometría, puesto que el Álgebra era el instrumento adecuado para *analizar* el problema de construcción geométrica. Descartes lo expresa claramente en el epígrafe de La Geometría titulado "Cómo se llega a las ecuaciones que sirven para resolver los problemas" [G.AT,VI,372]:

> "Así, si se quiere resolver algún problema, debe de antemano considerarse como ya resuelto, y dar nombre a todas las líneas que parecen necesarias para construirlo, tanto a las que son desconocidas como a las otras. Luego, sin considerar ninguna diferencia entre estas líneas conocidas y desconocidas, se debe examinar la dificultad según el orden que se presente como más natural de todos, en la forma como aquellas líneas dependen mutuamente las unas de las otras, hasta que se haya encontrado la manera de expresar una misma cantidad de dos maneras: lo que se denomina una ecuación, pues [el resultado de] los términos de una de esas dos formas son iguales a los de la otra".

Señalemos, punto por punto, los pasos a seguir, según Descartes, para resolver cualquier problema geométrico:

a) se da nombre a todos los segmentos que parecen necesarios;

b) se supone el problema resuelto, es decir, se supone conocida la longitud buscada;

c) se plantea la ecuación entre las longitudes conocidas y desconocidas;

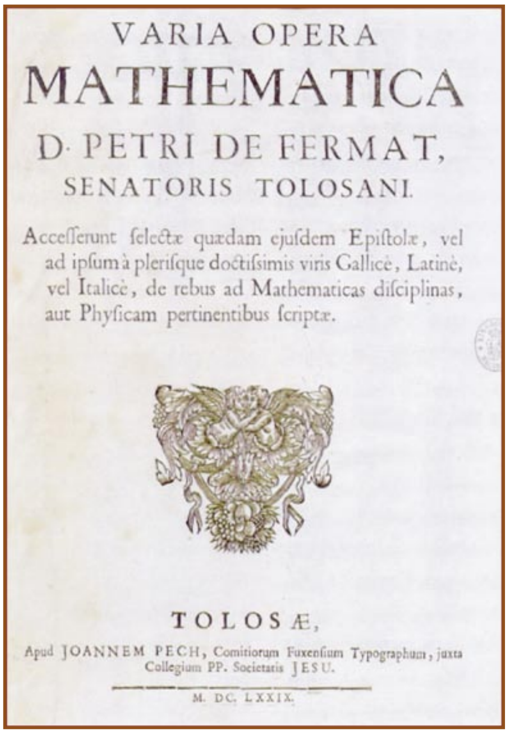
d) se resuelve esta ecuación;

e) se concluye con la construcción geométricamente de la solución.

Éste es el camino que sigue el método cartesiano en el que el estudio analítico se funde con la síntesis algebraica en transición de la Geometría al Álgebra y del Álgebra a la Geometría. El Análisis mediante el Álgebra traduce los datos geométricos de forma que sean tratables por medio del automatismo del cálculo algebraico, esto es el *Análisis Algebraico*. Se comprende, pues, el nombre de *Geometría Analítica* que en el curso de la Historia se le dio al instrumento desarrollado por Fermat y Descartes, aunque tal vez hubiera sido mas descriptivo el de *Geometría Algebraica* (que curiosamente resultaría de la permutación de los términos de *Álgebra Geométrica* con que se nombra buena parte de la Matemática de *Los Elementos* de Euclides), aunque este nombre también sería deficiente, toda vez que como hemos visto, la *Geometría Analítica* es mucho más que una mera aplicación del Álgebra a la Geometría. En suma, la Geometría Analítica sería el Análisis moderno, siendo el Álgebra por su carácter algorítmico el principal instrumento de la aplicación de ese Análisis, por eso también se podría definir con mayor precisión como la aplicación del *Análisis Algebraico* a la Geometría. Históricamente, hasta muy tarde se han utilizado los términos Álgebra y Análisis como sinónimos. Así aparecen, por ejemplo, en la famosa *Encyclopédie*, donde D'Alembert (1717-1783) escribe:

"El Análisis es propiamente el método de resolver los problemas matemáticos, reduciéndolos a las ecuaciones. El Análisis para resolver problemas, emplea el recurso del Álgebra, o cálculo de las magnitudes en general: estas dos palabras, Análisis y Álgebra, son a menudo miradas como sinónimas [...] Algunos autores definen el Álgebra (como siendo) el arte de resolver los problemas matemáticos: pero ésta es la idea del Análisis o del arte analítico más bien que del Álgebra".

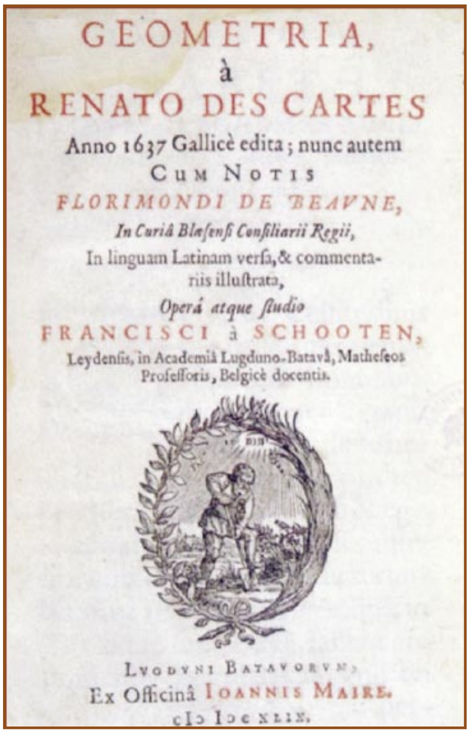
Cuestiones nominalistas aparte, volvamos a los orígenes para reiterar que la *Geometría Analítica* recibe su nombre y sus procedimientos del método de *Análisis* de los griegos y permite recuperar el *Análisis Geométrico* de los antiguos mediante la acción del Álgebra, ya que el carácter algorítmico de ésta acentúa las aptitudes heurísticas del Análisis. Así se observa claramente en *La Geometría*, donde sorprende la posibilidad cartesiana de reconstruir toda la Geometría con asombrosa simplicidad, como el propio Descartes asegura: "...se pueden construir todos los problemas de la geometría ordinaria, sin hacer más que lo poco que está comprendido en las cuatro figuras que he explicado" [G.AT,VI,376], y con unos instrumentos muy modestos, sólo los Teoremas de Tales y de Pitágoras, como indica a la princesa Elisabeth en la comunicación epistolar de noviembre de 1643: "Yo no considero otros teoremas que los lados de los triángulos semejantes están en proporción, y que, en los triángulos rectángulos, el cuadrado de la base es igual al cuadrado de los dos lados". Descartes hace esta observación respecto de la resolución del problema de Apolonio, pero lo mismo se puede decir de *La Geometría* en general. Es asombroso ¡cómo se puede hacer tanto con tan poco! Y es que el enfoque analítico, siempre con el recurso algorítmico del Álgebra simbólica, permite la generalización de los métodos y la aplicación uniforme de los mismos procedimientos a cuestiones similares.



VARIA OPERA
MATHEMATICA
D. PETRI DE FERMAT,
SENATORIS TOLOSANI.

Accesserunt selectæ quædam ejusdem Epistolæ, vel ad ipsum à plerisque doctissimis viris Gallicè, Latinè, vel Italicè, de rebus ad Mathematicas disciplinas, aut Physicam pertinentibus scriptæ.

TOLOSÆ,
Apud JOANNEM PECH, Comitiorum Fuxensium Typographum, juxta Collegium PP. Societatis JESU.
M. DC. LXXIX.



GEOMETRIA,
à
RENATO DES CARTES
Anno 1637 Gallicè edita; nunc autem
Cum Notis
FLORIMONDI DE BEAVNE,
In Curiâ Blæsensi Consiliarii Regii,
In linguam Latinam versa, & commentariis illustrata,
Operâ atque studio
FRANCISCI à SCHOOTEN,
Leydensis, in Academiâ Lugduno-Batavâ, Matheseos Professoris, Belgicè docentis.

LVGDVNI BATAVORVM,
Ex Officinâ IOANNIS MAIRE.
cIↄ Iↄc XLIX.

1. Edición de Samuel de Fermat de *VARIA OPERA MATHEMATICA* de D. PETRI DE FERMAT. Tolosa, 1679

2. La edición en latín de 1649 de van Schooten (con notas de F. De Beaune) de *La Geometría* de Descartes. Es la primera edición separada de *El Discurso del Método*

El gran historiador de la Ciencia español Francisco Vera escribe en la página 87 de su ilustrativa obra *Veinte matemáticos célebres* (Mirasol. Buenos Aires, 1961), en el capítulo quinto destinado a Fermat y Descartes, titulado "Celos mal reprimidos":

> "Fermat, como todos sus antecesores, consideraba que los problemas relativos a las figuras son geométricos y en ellos interviene el Álgebra como medio auxiliar, mientras que con Descartes el Álgebra figura en primera línea como técnica, como método de combinación y construcción, de tal modo que es el cálculo algebraico el que legitima los resultados de la nueva Geometría, destruye los escrúpulos de los griegos relativos a la definición de las curvas y hace inútil la teoría de la construcción geométrica, que queda sustituida por la síntesis de la construcción algebraica".

LA TRASCENDENCIA DE LA *GEOMETRÍA ANALÍTICA*

Con la fusión del *Análisis Geométrico* griego y la síntesis algebraica de Vieta, Fermat y Descartes dan a luz la *Geometría Analítica*, una herramienta revolucionaria dotada del potencial de la mecánica algorítmica operatoria de cálculo, propia de las ecuaciones del Álgebra, que reemplaza la rigidez de las ingeniosas construcciones geométricas del *Álgebra Geométrica* de los griegos por sistemáticas operaciones algebraicas que permiten mediante un proceso analítico-sintético de resolución de problemas, no sólo reconstruir la Geometría clásica con más claridad, flexibilidad, operatividad y versatilidad, sino crear, además, una potente heurística geométrica, como poderoso instrumento de exploración e investigación, mediante el que Fermat y Descartes pudieron plantear y resolver de forma admirable, brillante y prodigiosa problemas difíciles, clásicos y modernos, como la determinación de las rectas normales a las curvas, el *Problema de Pappus* y el *Problema de Apolonio*, entre otros, en el caso de Descartes, y muchos nuevos problemas de lugares geométricos, estudio de elementos notables de las curvas –diámetros, ejes, centros, asíntotas, ...–, extremos y tangentes, cuadraturas y cubaturas, centros de gravedad y rectificación en el caso de Fermat. En este sentido, la *Geometría Analítica* tuvo una decisiva influencia como instrumento clave de la eclosión de multitud de métodos y técnicas infinitesimales, que condujeron al descubrimiento del Cálculo por Newton y Leibniz(4).

Es la primera vez en la Historia moderna que se tiene el convencimiento de haber superado a los antiguos en algún aspecto. A este respecto, puede ser muy oportuno recordar las reflexiones de O. Spengler, matemático y ensayista de éxito, de los años 20 del siglo pasado, en su libro *La decadencia de Occidente* donde desarrolla su teoría de la Historia como una sucesión de ciclos culturales. Para Spengler no hay una sola Matemática con desarrollo lineal y contenido acumulado a través de los siglos, sino que hay tantas Matemáticas como culturas, como ciclos históricos, y cabría distinguir entre otras, "la Matemática antigua", de la cultura griega y la "Matemática moderna" de la cultura occidental y cristiana, distintas en esencia y que serían fruto de los elementos culturales de la época y al mismo tiempo un factor decisivo en la configuración de los mismos. En el capítulo I de la citada obra, titulado "El sentido de los números", Spengler (1998, p.144) escribe:

> "No hay una Matemática, hay muchas Matemáticas. ... El espíritu antiguo creó su Matemática casi de la nada. El espíritu occidental, histórico, había aprendido la Matemática antigua, y la poseía, aunque sólo exteriormente y sin incorporarla a su intimidad; hubo, pues, de crear la suya modificando y mejorando, al parecer, pero en realidad aniquilando la matemática euclidiana, que no le era adecuada. Pitágoras llevó acabo lo primero; Descartes lo segundo. Pero los dos actos son, en lo profundo, idénticos".

En efecto, Descartes parte de la Geometría griega para construir algo completamente nuevo, que se convertirá en una Matemática universal y que, en particular, apartará a la Geometría del eje central de la Matemática destronándola de forma definitiva de su rango de reina de la Matemática de modo que la Matemática algebrizada de Descartes desplazará y ocupará el lugar de la Matemática geometrizada de los griegos. Así pues, Descartes con su *Geometría Analítica* otorga al Álgebra el gobierno soberano de las Matemáticas, hasta que en el siglo XIX Gauss afirme que es la Aritmética quien debe ocupar el trono de esta ciencia.

La importancia que la posteridad ha concedido a *La Geometría* de Descartes no coincide con los aspectos que interesaban a su autor, porque la idea esencial de futuro de la *Geometría Analítica* es la tan reiteradamente apuntada de la asociación de ecuaciones y curvas en un sistema de coordenadas, pero como bien señala Kline (1992, vol.1. p.419):

> "... Para Descartes asociar ecuación y curva no era más que un medio para un fin, a saber la resolución de problemas de construcciones geométricas. El énfasis de Fermat en las ecuaciones de lugares geométricos es, desde el punto de vista moderno, más oportuno".

Así es. Las construcciones geométricas que con tanto esmero describe Descartes en *La Geometría* desde el mismo comienzo de la obra han ido perdiendo importancia, porque a diferencia de cómo sucede en la Matemática griega y en la del siglo XVII, la constructibilidad ha dejado de ser una condición necesaria para la existencia. No obstante, más allá del acento en la construcción geométrica de las soluciones de las ecuaciones, por fortuna, Descartes también dio unos usos alternativos a las ecuaciones de las curvas, como en la resolución del *Problema de Pappus* [G.AT,VI,377-387] y en la determinación de las normales a las curvas [G.AT,VI,412-423], donde se sirve de las propiedades geométricas de las curvas para "construir" las raíces comunes de las ecuaciones determinando los puntos de encuentro de las curvas correspondientes; y a la inversa, partir de las ecuaciones y de sus raíces para obtener los puntos de intersección de las curvas correspondientes. Por eso estos dos problemas han ocupado siempre un lugar distinguido en todo estudio de *La Geometría* de Descartes. De hecho aquí aparece otro principio fundamental de la *Geometría Analítica*: "El problema geométrico de la intersección de curvas se reconduce al problema algebraico de resolución de sistemas de ecuaciones". El problema del trazado de las normales a una curva en un punto, es considerado cómo el mayor éxito del método cartesiano, marcando una impronta en la génesis de la *Geometría Analítica* por la capacidad que desarrolla Descartes de establecer puentes de ida y vuelta entre el Álgebra y la Geometría: análisis geométrico de los problemas, síntesis del análisis en el Álgebra de ecuaciones y traducción geométrica de los resultados algebraicos. Se trata de un magnífico diccionario reversible entre dos lenguajes, el geométrico y el algebraico, con la posibilidad de traducir no sólo en el ámbito gramatical –puntos por coordenadas, curvas por ecuaciones–, sino también en el dominio sintáctico –las relaciones entre los elementos geométricos, por ejemplo, intersecciones de curvas, se traducen en relaciones entre los correspondientes elementos algebraicos, mediante sistemas de ecuaciones–. Con un énfasis inusitado Descartes considera que este problema es el más importante, no sólo de cuantos ha resuelto sino de cuantos aspirara a descubrir en Geometría [G.AT,VI, 413]:

> "Y me atrevo a decir que éste es el problema mas útil y mas general no sólo que yo conozca, sino aun que yo haya anhelado jamás conocer en Geometría".

A pesar de ciertas reticencias por parte de Pascal, Barrow, Hobbes, e incluso de Newton y Leibniz en la aceptación de los nuevos métodos de *La Geometría* de Descartes, la extensión de sus aplicaciones a todos los ámbitos de la Matemática fue cada vez más inexorable. A ello contribuyó sobremanera la difusión de las diversas ediciones críticas de van Schooten (1615-1660), plenas de comentarios explicativos, aclaraciones complementarias y apostillas extensivas de los métodos cartesianos del propio editor y de otros matemáticos.

En una de las entradas de la Enciclopedia, la que define el concepto de *Curva*, D'Alembert expresa la idea básica de la asociación de curvas y ecuaciones de las Geometrías Analíticas de Fermat y Descartes en relación con los lugares geométricos de los antiguos:

> "Descartes es el primero que haya pensado en expresar las líneas curvas por medio de ecuaciones. Esta idea sobre la que se funda la aplicación del Álgebra a la Geometría ha sido muy feliz y fecunda. Está claro que al resolver la ecuación de una curva se obtiene uno o varios valores de la ordenada y para una misma abscisa x, y que, en consecuencia, una curva trazada no es otra cosa que la solución geométrica de un problema indeterminado, es decir, que tiene una infinidad de soluciones: es lo que los antiguos llamaban lugar geométrico. Así pues, aunque ellos no pudieron tener la idea de expresar las curvas por medio de ecuaciones, habían visto, sin embargo, que las curvas geométricas no eran otra cosa que el lugar, es decir la sucesión de una infinidad de puntos que satisfacían a la misma cuestión. Por ejemplo, que el círculo era el lugar de todos los puntos que describen los vértices de los ángulos rectos, que se pueden formar sobre una misma base dada tomada como diámetro del círculo, y así para las demás curvas".

Aunque la referencia de D'Alembert no hace ningún honor a su compatriota Fermat, tiene el interés de conocer el concepto que se tenía de *La Geometría* de Descartes, unos ciento treinta años después de su publicación.

En las dos centurias siguientes a la de Fermat y Descartes, matemáticos de la talla de Euler, Monge, Lagrange, Lacroix, etc. imprimirán a la *Geometría Analítica* un ingente desarrollo hasta situarla en el umbral de la *Geometría Analítica* moderna (la que se imparte hoy académicamente), salvo en lo que se refiere al instrumento vectorial, que la convertirá en una de las vetas más fructíferas del pensamiento matemático, en un instrumento responsable de la increíble pujanza y del impresionante progreso que ha desarrollado la Matemática desde entonces. Por ejemplo, más allá del Análisis Matemático, del encuentro de esta materia con la *Geometría Analítica* aplicada al estudio de curvas y superficies surge, sobre todo tras los trabajos de Euler y Monge, la Geometría Diferencial.

La *Geometría Analítica* goza de una serie de virtudes que hacen de ella una cómoda y didáctica herramienta matemática para abordar los problemas geométricos. Por una parte permite que las cuestiones geométricas puedan formularse algebraicamente y que los objetivos geométricos puedan alcanzarse por medio del Álgebra, e inversamente, facilita la interpretación geométrica de los enunciados algebraicos, lo que propicia una percepción más intuitiva de su significado, con la posible apertura a la visión de nuevos problemas. Así lo ve Lagrange cuando escribe en sus *Leçons élémentaires de mathématiques* (1795):

> "Mientras el Álgebra y la Geometría han estado separadas, su progreso ha sido lento y sus aplicaciones limitadas; pero cuando estas dos ciencias han sido vinculadas, se han prestado su fuerza mutuamente y han caminado juntas hacia la perfección".

Ilustremos estas ideas de Lagrange mediante la original motivación de Fermat y Descartes, es decir, la asociación de curvas y ecuaciones. Toda curva construida según una regla geométrica se puede representar mediante su propia ecuación, que caracteriza a la curva y por ello es diferente de la que corresponde a otra curva distinta. Así, las propiedades geométricas de una curva pueden ser descubiertas sin más que examinar el comportamiento algebraico de su ecuación. Los vínculos entre curvas, por ejemplo, si se cortan o si son tangentes, se pueden predecir estudiando las relaciones algebraicas que existen entre sus ecuaciones. Por tanto, una vez obtenida de la definición geométrica o cinemática la ecuación algebraica que tiene asociada, el establecimiento de las propiedades geométricas restantes de la curva es una cuestión de cálculo algebraico. El poder algorítmico de la máquina simbólica creada por el Álgebra aplicado a la Geometría convierte a la *Geometría Analítica* en un magnífico instrumento de investigación. Así lo describe de forma magistral el historiador y filósofo de la ciencia Hull (1981, p.268):

> "Su mérito consiste en que capacita para hallar resultados geométricos mediante un procedimiento sistemático que, si se aplica bien, no puede prácticamente fallar. El descubrimiento

de nuevos teoremas particulares que en el caso de los métodos griegos, dependía siempre de la llama genial de la imaginación [que se fatiga según Descartes] o bien de la buena suerte [de la idea feliz], pasa a la esfera de la competencia profesional ordinaria. El progreso de la Geometría, esencial para el de la ciencia, se hace ahora mucho menos romántico, pero mucho más rápido de lo que fue. La Geometría Analítica ha afectado probablemente a la vida humana más profundamente, aunque menos violentamente, que la máquina de vapor o el aeroplano. La creación de nuevos métodos generales es de mucha mayor importancia que el descubrimiento de conocimientos particulares, por interesantes o útiles que éstos sean".

A partir de Fermat y Descartes habrá dos tipos de tratamiento de los problemas geométricos que darán lugar a dos Geometrías, la Analítica, que aplicará el nuevo lenguaje algebraico y la Sintética, que prescindirá del mismo. Gracias al lenguaje analítico podrán resolverse problemas para los que el lenguaje geométrico puro era impotente, como hallar la normal o la tangente a una curva, calcular el área encerrada por una curva, máximos y mínimos, y demás problemas infinitesimales, cuya resolución se inicia en simultaneidad con el trabajo cartesiano. Pero aunque un problema pueda ser tratado de las dos formas, la analítica dependerá menos de la geometría de la figura y por tanto será más simple y más general. Por ejemplo, para demostrar que las alturas o mediatrices de un triángulo se cortan en un punto, en Geometría Sintética hay que considerar por separado la forma del triángulo según los ángulos, porque ello condiciona si la intersección tiene lugar en el interior o en el exterior del triángulo. En *Geometría Analítica*, los dos casos se consideran de consuno.

Las maravillosas virtudes de la *Geometría Analítica*, ponderadas por todos los grandes matemáticos, a partir de Fermat y Descartes, no obliga a abandonar la Geometría Sintética, simplemente el profesional sabe que hay dos métodos geométricos y utilizará uno u otro según el objetivo del problema o según el gusto y el sentido estético. ¿Por qué renunciar a las diversas herramientas del taller geométrico? Por ejemplo, el gran maestro Euler, en un pequeño artículo de 1747 que lleva el poco original título de *Variae demostrationes geometricae*, aplicará Geometría Sintética pura para demostrar, con una elegancia incomparable, la clásica y famosa Fórmula de Herón para el área del triángulo en función de los lados (Dunham, 2000, p.215). Pero en otro artículo de 1767, haciendo gala de una inefable intuición geométrica y con una admirable sagacidad algebraica, Euler descubrirá y demostrará, con la más bella y brillante aplicación de *Geometría Analítica*, que "En cualquier triángulo el Ortocentro, el Baricentro y el Circuncentro están sobre la misma recta. Además, el Baricentro está dos veces más lejos del Ortocentro que del Circuncentro".

Conocidos ambos ejemplos, digamos que la versatilidad analítica, sintética, algebraica, geométrica, teórica y práctica de Euler no tiene límites. Las dos demostraciones eulerianas representan en su propia persona a los dos bandos, el analítico y el sintético, enfrentados en una controversia que se remonta al umbral de la aplicación de los métodos cartesianos. Por fortuna, para los grandes artífices de la Matemática, como Euler o Monge, la polémica es de lo más estéril y debe ceñirse a cuestiones de tipo exclusivamente estético, sin elevarla a juicios de valor acerca de cuál de las dos Geometrías es superior, aunque se esté de acuerdo en que, ciertamente, por el automatismo del Álgebra Simbólica que se aplica en la *Geometría Analítica*, la Geometría Sintética, como dice Dunham (2000, pp.229-230):

> "requiere a menudo un punto de intuición, que habitualmente se conoce como inspiración. .... ¿Cómo sabía Euler qué hacer [en uno y otro problema]. En última instancia, la respuesta a esta pregunta se halla en el misterioso territorio de la imaginación humana. ... Por supuesto, uno puede preguntarse si la Geometría Analítica es realmente Geometría. Carente de gracia y elegancia, dependiente de lo que Carnot llamó "los jeroglíficos del Análisis", ¿no es una mera aplicación de una fuerza algebraica inexorable?".

La fuerza incuestionable de la *Geometría Analítica* y su generalidad e independencia de la «idea feliz que trae la divina inspiración», permite entender, por ejemplo, que el discípulo de Monge, Poncelet (1788-1867), uno de los artífices de la Geometría Proyectiva moderna, autor de la importante obra *Traité des propriétés projectives des figures* (1822), y no precisamente un gran admirador de la *Geometría Analítica*, escribiera:

> "Mientras la Geometría Analítica ofrece su característico método general y uniforme como forma de proceder en la resolución de problemas..., la otra [la Geometría Sintética clásica] actúa al azar y depende completamente de la sagacidad de los que la emplean".

CONCLUSIONES

Para el público en general, incluso para el profesional de las Matemáticas, la *Geometría Analítica* es un invento de Descartes, de ahí la denominación que adopta a veces de *Geometría Cartesiana*, aludiendo a la forma latinizada del apellido del gran filósofo francés. Tal nombre no hace justicia a ambos fundadores, al ignorar la copaternidad de Fermat.

Resumiendo a grandes rasgos y como colofón, digamos que la *Geometría Analítica* tal como la manejamos y la enseñamos actualmente (excepto en lo referente a la herramienta vectorial), cubre una serie de aspectos y etapas esenciales, que de forma muy simplificada reseñamos a continuación, siguiendo, más o menos, el orden de aparición histórica:

1. La introducción de las coordenadas.
2. La aplicación del método de Análisis.
3. El trazado de una curva construyendo ordenadas a partir de abscisas.
4. La aplicación del Álgebra simbólica a los problemas geométricos.
5. La derivación de ecuaciones de los lugares geométricos y la construcción geométrica de las soluciones de ecuaciones.
6. El estudio de las propiedades de las curvas dadas por sus ecuaciones sobre todo de las derivadas de ecuaciones lineales y cuadráticas.
7. La representación gráfica de una curva dada mediante la expresión analítica funcional.
8. La derivación de formulas fundamentales para resolver problemas sobre puntos notables, rectas, planos, ángulos, paralelismo, perpendicularidad, distancias, áreas, etc.
9. La clasificación general de curvas y superficies de segundo orden.

Con todas las limitaciones apuntadas con anterioridad acerca de la ausencia de Álgebra simbólica en la Geometría griega, el primer punto fue cubierto por los griegos, en particular Menecmo y Apolonio; el segundo se inicia con Hipócrates de Quíos, se clarifica con Platón y se consolida con Pappus; el tercero pertenece al trabajo de Oresme; Vieta desarrolló el cuarto; Descartes se ocupó del quinto punto y consideró brevemente algunos aspectos del sexto; Fermat se proyectó sobre el sexto apartado y resolvió algunos problemas relacionados con el quinto; el séptimo fue ampliamente cubierto por Euler; el octavo es iniciado por Euler y continuado por Lagrange, Monge y Lacroix; y el noveno es comenzado por De Witt, Wallis y Stirling para la cónicas, cerrado para éstas por Euler, y ampliamente estudiado para las cuádricas por Euler y Monge.

La *Geometría Analítica*, de origen remoto en el Análisis Geométrico de los griegos con su incipiente uso retórico de coordenadas en las *Cónicas de Apolonio* y su apoyo en la mecánica algorítmica del Álgebra simbólica de Vieta, domina el pensamiento matemático desde la época de sus creadores, Fermat y Descartes, hasta nuestros días. El empleo sistemático de las coordenadas tratadas con el cálculo algebraico, es una potente herramienta algorítmica de resolución de problemas geométricos, un método de un poder y una universalidad tan eficientes en la Matemática, que supera cualquier otro instrumento anterior, y más allá de la Geometría y de la Matemática, la Geometría Analítica ha revolucionado todas las ciencias relacionadas con el tiempo y el espacio, a través del concepto de función, la herramienta más importante para el conocimiento y dominio de la naturaleza. Por eso como escribe Kline (1992, vol.1, p.425): "La Geometría Analítica cambió la faz de las Matemáticas", porque (Kline, 1985, p.51): "desde un punto de vista técnico la Geometría Analítica revolucionó la metodología matemática".

La fuerza algebraica infalible de la Geometría Analítica, su universalidad y su autonomía de la "fortuna que depende de la inspiración»", democratiza la Geometría y la Matemática en general y pone al servicio de la Humanidad, es decir, de cualquier persona normal, de todo escolar que tenga pequeños rudimentos de Álgebra, un eficaz instrumento que potencia la intuición, facilita la investigación y promueve que no sea imprescindible un gran talento, una gran capacidad inventiva y una gran sagacidad y sutileza intelectual en la resolución de los problemas geométricos. Al sustituir las ingeniosas y complejas construcciones geométricas euclídeas por sistemáticas y mecánicas operaciones algebraicas, con una elegancia y plenitud heurística que aúna en un único acto intelectual el descubrimiento y la demostración, "se ejercita el entendimiento sin fatigar mucho la imaginación" que diría Descartes en El *Discurso del Método*: (DM.AT,VI,17). En este sentido decimos que la Geometría Analítica es una geometría democratizadora, y por tanto un potente utensilio de la Matemática escolar. Por eso nos permitimos parafrasear y completar la frase anterior de Kline para sentenciar:

"La Geometría Analítica cambió la faz de las Matemáticas y de la Educación matemática".

NOTAS

(1) Los textos originales de Descartes y Fermat que se transcriben en el artículo se tomarán de sus ediciones estándares (14 y 15 de la Bibliografía). La referencia concreta a un texto de Fermat se hará indicando el tomo y la página a continuación de la partícula TH.OF., mientras que para un texto de Descartes se hará indicando la página a continuación de la partícula DM.AT,VI, G.AT,VI o R.AT.X, respectivamente, según se trate de *El Discurso del Método*, de *La Geometría* o de *Las Reglas para la dirección del espíritu*. Por ejemplo (G.AT.VI.372) indicará que el texto al que se hace alusión se encuentra en la página 372 del sexto tomo de las *Oeuvres de Descartes*, que contiene *La Geometría de Descartes*.

(2) Para una visión exhaustiva de esta cuestión se puede consultar la siguiente obra del autor de este estudio: *Platón y la Academia de Atenas*. Nivola, Madrid, 2006, cap.11.

(3) Para profundizar en esta cuestión, véase la obra del autor de este artículo: *Los orígenes de la Geometría Analítica*. Fundación Canaria *Orotava* de Historia de la Ciencia. Tenerife, 2003, cap. 6.

(4) Para un amplio estudio de esta cuestión, véase la obra del autor de este artículo *Las raíces del cálculo infinitesimal en el siglo XVII*. Alianza Editorial, Madrid, 1992, caps. 1.2, 2, 3.

BIBLIOGRAFÍA

I. Obras originales sobre La Matemática Griega

1. **Euclides,** 1996: *Elementos*. Traducción y notas de M. L. Puertas. Gredos. Madrid.
2. **Heat, T. L.,** 1956: *The thirteen books of The Elements*. 3 Vols. Dover. New York.
3. **Ver Eecke, P.,** 1959: *Les Coniques d'Apolonius de Pergue*. Blanchard, París.
4. **Ver Eecke, P.,** 1959: *Diophante d'Alexandrie. Les six livres arithmétiques*. Blanchard, París.
5. **Ver Eecke, P.,** 1982: *Pappus d'Alexandrie. La Collection Mathémathique*. Blanchard, París.
6. **Vera, F.,** 1970: *Científicos griegos* (Ediciones de *Los Elementos* de Euclides, *Las Cónicas* de Apolonio, *La Aritmética* de Diofanto y *La Colección Matemática* de Pappus). Aguilar, Madrid.

II. Obras originales de Fermat y Descartes

7. **Descartes, R.,** 1947: *La Geometría*. Introd. de P. Rosell. Espasa-Calpe. Buenos Aires.
8. **Descartes, R.,** 1954: *The Geometry*. Traducción de D. Smith. Dover. New York.
9. **Descartes, R.,** 1999: *La Geometria*. Introducció, traducció i notes de J.Pla i P. Viader. Institut d'Estudis Catalans, Eumo-Pòrtic. Barcelona-Vic.
10. **Descartes, R.,** 1986: *Discurso del Método, Dióptrica, Meteoros y Geometría*. Prólogo, traducción y notas de G. Quintás. Alfaguara. Madrid.
11. **Descartes, R.,** 1983: *Discurso del Método/Reglas para la dirección de la mente*. Orbis. Barna.
12. **Descartes, R.,** 1989: *Reglas para la dirección del espíritu*. Alianza Editorial. Madrid.
13. **Descartes, R.,** 1991: *Discurso del Método*. Alianza Editorial. Madrid.
14. **Descartes, R.,** 1964-74: *Oeuvres de Descartes*. Pub. C. Adam; P. Tannery. Lib. Philos. J. Vrin. París.
15. **Fermat,** 1891-1912: *Oeuvres de Fermat*. Pub. Henry, C.; Tannery, P. Gauthier-Villars. París.

III. Obras originales sobre otros autores

16. **D'alembert, J. B.,** 1954: *Discurso preliminar de la Enciclopedia*. Losada. Buenos Aires.
17. **Oresme, N.,** 1968: *Tractatus de configurationibus Qualitatum et motuum*. Versión de M.Clagett. University of Wisconsin Press.
18. **Vieta,** 1867: *Introduction a l'Art Analytique*. Traduit par M. F. Ritter.
19. **Vieta,** 1983: *The Analytic Art*. Traslated by T.R.Witmer. The Kent University Press. Ohio.
20. **Vieta,** 1991-92: *Oeuvres Mathématiques*. Trad. latin in français par J. Peyroux. Blanchard. París.

IV. Obras generales de Historia de las Matemáticas

21. **Álvarez, C.,** 2000: *Descartes y la ciencia del siglo XVII*. Siglo XXI. México. Caps.1, 3, 4.
22. **Bell, E. T.,** 1950: *Les grands mathématiciens*. Payot. París. Caps. 3, 4.
23. **Bell, E. T.,** 1985: *Historia de las Matemáticas*. F. C. Económica. México, D.F. Caps. 3, 6, 7.
24. **Boyer, C. B.,** 1956: *History of Analytic Geometry*. Scripta Mathematica. Yeshiva Univ. New York.
25. **Boyer, C. B.,** 1986: *Historia de las Matemáticas*. Alianza Universidad, Madrid. Caps. 4, 5, 6, 7, 9, 11, 14, 15, 16, 17, 18, 21, 22.
26. **Chasles, M.,** 1875: *Aperçu historique sur l'origine et le développment des méthodes en Géométrie*. París.
27. **Chica, A.,** 2001: *Descartes, Geometría y Método*. Nivola. Madrid.
28. **Colerus, E.,** 1972: *Breve historia de las Matemáticas*. Vol I: 1, 2, 4, 5, 8, 9; Vol. II: 1. Doncel, Madrid.
29. **Coolidge, J. L.,** 1968: *A History of the conics sections and quadric surfaces*. Dover, New York. Caps.1, 2, 3, 5.1, 5.3, 6.
30. **Dunham, W.,** 2000: *Euler, el maestro de todos los matemáticos*. Nivola, Madrid. Cap. 7.
31. **Eves, H.,** 1977: *Great Moments in Mathematics*. The math. association of America. Vol. I. Caps. 5, 6, 8, 11, 12, 23.
32. **Eves, H.,** 1983: *An Introduction to the History of Mathematics*. CBS Colle-ge Publishing, New York. Caps. 3, 4, 5, 6, 10, 12.
33. **Gelfand, E.,** 1981: *El método de las coordenadas*. MIR. Moscú.
34. **González Urbaneja, P. M.,** 1992: *Las raíces del Cálculo Infinitesimal en el siglo XVII*. Alianza Editorial. Madrid. Caps. 1, 3.1, 3.2.
35. **González Urbaneja, P. M., Vaqué, J.,** 1993: *El método relativo a los teoremas mecánicos de Arquímedes*. Univers. Autón. Barna y Polit. de Catalunya. Clásicos de las Ciencias. Apénd. 1.
36. **González Urbaneja, P. M.,** 2001: *Pitágoras, el filósofo del número*. Nivola. Madrid. Cap. 6.
37. **González Urbaneja, P. M.,** 2001: *La aparición de los inconmensurables*. Mundo Científico, 220, pp. 56-63. Barcelona.
38. **González Urbaneja, P. M.,** 2000: *Matemáticas y matemáticos en el mundo griego* (en *El legado de las Matemáticas*. *De Euclides a Newton*. *Los genios a través de sus libros*). Sevilla.
39. **González Urbaneja, P. M.,** 2003: *Los orígenes de la Geometría Analítica*. Fundación Canaria Orotava de Historia de la Ciencia. Tenerife.
40. **González Urbaneja, P. M.,** 2006: *Platón y la Academia de Atenas*. Nivola. Madrid. Caps. 11, 13, 14, 17.
41. **Heat, T. L.,** 1981: *A History of Greek Mathematics*. 2 Vols. Dover, New York. Caps. 5, 6, 9, 10, 11, 14, 19, 20.
42. **Kline, M.,** 1992: *El pensamiento matemático de la Antigüedad a nuestros días*. 3 Vols. Alianza Universidad. Madrid. Caps. 3, 4, 5, 15, 23.